北京高校数学教育发展研究中心
数学教育与教育数学研究丛书

第三届（2017）北京高校数学微课程教学设计竞赛优秀作品集锦

北京高校数学教育发展研究中心　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

第三届（2017）北京高校数学微课程教学设计竞赛优秀作品集锦 / 北京高校数学教育发展研究中心主编．—北京：电子工业出版社，2018.4
（北京高校数学教育发展研究中心数学教育与教育数学研究丛书）
ISBN 978-7-121-33904-2

Ⅰ. ①第…　Ⅱ. ①北…　Ⅲ. ①高等数学—课程设计—高等学校　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 056148 号

策划编辑：米俊萍
责任编辑：杨秋奎　　特约编辑：曲　岩
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：11.75　字数：180 千字
版　　次：2018 年 4 月第 1 版
印　　次：2018 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：88.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：mijp@phei.com.cn。

前　　言

为推动高等学校大学数学课程教学改革，鼓励教师将信息技术与教育教学内容紧密融合，促进教师更新教学理念、改进教学方法、创新教学设计、加强教师基本技能的训练、促进教师牢固树立爱岗敬业思想、磨炼教师教学内功、提升课堂教学水平、提高大学数学课程教学质量、落实教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会（以下简称教指委）工作要求，为教指委和高等学校教学研究中心共同主办的全国高校数学微课程教学设计竞赛推选选手，北京高校数学教育发展研究中心于2017年3—7月举办了“第三届（2017）北京高校数学微课程教学设计竞赛”活动。在北京市教委的大力支持下，在中心专家组和全体成员的共同努力下，本次比赛活动取得了圆满的成功。

参赛教师通过教学设计、课堂录像、课件制作等环节充分展示了北京地区高校广大数学教师的教学理念、教学实力、教学水平和教学风采。本次大赛为广大一线数学教师提供了充分展示自己课堂教学成果及教师基本功综合素质的舞台，诠释了全新的大学数学教学改革的理念，交流了最新的教育教学改革成果，对全面提升高校数学教师的教学水平和业务素质起到了极大的促进作用。

教师的天职是教学，提高教育教学质量是学校永恒的主题，提高课程教学质量是提高教育教学质量的关键，而提高课程教学质量需要抓好教学基本技能的训练。为了方便老师们借鉴学习、加强交流和发挥优秀竞赛成果的辐射作用，经过专家的认真评审和讨论，最后从72件参赛作品中选择32件优秀作品结集出版。

由于编辑工作量较大、时间紧，且编者水平有限，如有不当之处，敬请作者和读者指正。

北京高校数学教育发展研究中心

2017年12月

目　　录

第一型曲线积分的计算法…………………………………………………周广艳（1）

函数展开成泰勒级数的充要条件………………………………………鞠红杰（4）

初等矩阵……………………………………………………………………夏伶莉（9）

等周不等式………………………………………………………………刘白羽（26）

投掷项目的最佳出手角度………………………………………………李翰君（36）

违约概率损失的后验极大似然估计……………………………………刘洪伟（39）

由泊松分布到指数分布…………………………………………………王丹龄（46）

定积分在几何学上的应用………………………………………………张智勇（51）

假设检验原理……………………………………………………………牟唯嫣（63）

假设检验原理……………………………………………………………谢玉粉（68）

极坐标系下面积的计算…………………………………………………夏　霞（71）

导数的定义和几何意义…………………………………………………陈星玎（78）

给药方案的确定…………………………………………………………刘　芳（84）

滑块游戏的可解性………………………………………………………宋诗畅（87）

北京的二十环问题………………………………………………………李　娅（90）

隐函数的求导法…………………………………………………………吕　兴（96）

二元函数的连续性……………………………………………………朱圣芝（102）

数列极限的例子………………………………………………………曹丽梅（110）

拉格朗日乘数法……………………………………………………杨卫星（116）
偏导数…………………………………………………………李　鹤（121）
实对称矩阵的正交对角化………………………………………苏贵福（125）
最大线性无关组与向量组的秩…………………………………师钦贤（131）
悬链线及其方程…………………………………………………何　洋（140）
闭区间连续函数的零点存在定理………………………………闫　浩（144）
罗尔定理的证明…………………………………………………郭晓玲（149）
函数最值的应用实例……………………………………………廖　苏（153）
线性相关、线性无关的概念……………………………………余爱梅（156）
线性蛛网模型……………………………………………………常广平（160）
初等矩阵的定义…………………………………………………叶　飞（167）
t 分布与 F 分布 ………………………………………………张赛茵（170）
正态分布…………………………………………………………冯　杰（172）
从概率的角度探讨美国大选结果——二项分布的应用……孙　妍（177）

第一型曲线积分的计算法

周广艳
北京工商大学

作品标题：第一型曲线积分的计算法
所属课程：高等数学（下）
相关知识点：第一型曲线积分的计算法
知识点编码：110103
授课对象：本科一年级学生
授课时长：12 分钟
参考文献：同济大学数学系. 高数数学（上册）[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

第一型曲线积分是继定积分、重积分后的第三种积分。定积分之前研究的是定义在直线段上的函数的积分，现在研究的是定义在平面或空间曲线段上函数的积分。如何计算这种积分，是需要学生掌握的重要内容。

二、教学目标

理解第一型曲线积分的含义，掌握计算第一型曲线积分的方法和技巧。

三、教学内容及重点难点分析

（1）教学内容：第一型曲线积分的计算方法。

（2）教学重点：如何将第一型曲线积分化为定积分来计算。

（3）教学难点：如何恰当地将曲线参数化。

四、教学方法和过程

（1）问题引入：由定义及弧微分公式，引入如何计算的问题。

（2）问题转换：将第一型曲线积分转换为熟悉的定积分来计算。

（3）深入理解：运用公式时需要注意的问题。

（4）特殊情形：其他形式的曲线方程如何处理。

（5）问题推广：由平面曲线推广至空间曲线。

（6）举例演示：由例子演示求解过程。

（7）总结练习：“一求、二代、三定限”的口诀。

教学步骤	教学内容与互动	呈现方式	教学方法
（1）问题引入：回忆第一型曲线积分定义、弧微分公式，提出如何计算的问题	$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$ 设曲线的参数方程如下： $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$ 则弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$ 互动：能否用已经学习过的定积分来计算第一型曲线积分	PPT 动态呈现第一型曲线积分的定义式、强调弧微分公式	引导发现、探究式教学
（2）问题转换：将第一型曲线积分转化为定积分，给出计算公式	**定理**：设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$上的连续函数，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ 互动：这个公式的核心思想是什么	PPT 动态呈现计算公式及公式成立的条件	案例教学
（3）深入理解：计算公式中的细节处理	(1)注意定积分的积分区间满足“下小上大”的原则； (2)注意被积函数中的 x，y 之间彼此不独立。 互动：思考运用上述公式面临的困难和问题	PPT 呈现转化后定积分的特点及被积函数的特点	探究式教学

续表

教学步骤	教学内容与互动	呈现方式	教学方法
（4）特殊情形：曲线参数方程的形式有哪些	除了参数方程，如果 L 是直角坐标方程和极坐标方程，公式依然成立 （1）$L: y=g(x), a\leqslant x\leqslant b$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}\mathrm{d}x$ （2）$L: r=r(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 互动：具体情况具体解决	PPT 呈现、不同坐标系下曲线的方程形式不同	探究式教学、引导教学
（5）问题推广：由平面到空间的推广	设空间曲线的参数方程为 $\varGamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$	PPT 呈现、万变不离其宗，公式依然成立	引导发现
（6）举例演示：由例子来强化运用	**例 1**：计算 $\int_L\sqrt{y}\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧。 **例 2**：计算曲线积分 $\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中，$\varGamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 为螺旋线。 互动：总结运用思想，找寻其他参数化方法	PPT 动态呈现计算过程	教学运用、强调思想及应用方法
（7）总结规律	总结出便于计算的口诀“一求、二代、三定限”。 互动：课后练习题	PPT 动态呈现、利用口诀强化理解、记忆	引导发现

五、教学总结

本次课以教师为主导，通过回顾知识把握对第一型曲线积分的计算方法与技巧。在授课过程中启发学生总结规律，培养学生的抽象思维能力与计算能力，条理清晰，演示生动。

函数展开成泰勒级数的充要条件

鞠红杰
北京邮电大学

作 品 标 题：函数展开成泰勒级数的充要条件
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：泰勒公式，函数展开成幂级数，近似计算
知识点编码：121002
授 课 对 象：本科一年级学生
授 课 时 长：11 分钟 46 秒
参 考 文 献：[1] 同济大学. 高等数学. （下册）[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.
[2] Finney W G. Thomas’Calculus[M]. 叶其孝，王耀东，唐兢，译. 北京：高等教育出版社，2004.

一、教学背景

学生前面学习了泰勒公式，泰勒公式讲述了针对在某邻域内有 n+1 阶导数的函数，可以在该邻域内展开为一个 n 次泰勒多项式加上余项。那么对于具有各阶导数的“好”函数，泰勒多项式可以一直写下去，得到一个幂级数，此时泰勒公式中的等式是否依然成立？ 我们从该问题出发探讨函数展开成泰勒级数的充要条件。

二、教学目标

1．知识层面

（1）理解：泰勒级数的概念。

（2）掌握：函数展开成泰勒级数的充要条件，并利用充要条件将函数展开成泰勒级数。

（3）了解：泰勒级数在近似计算中的应用。

2．能力方面

（1）通过图像演示，培养学生的观察能力。

（2）培养学生逐层递进思考问题、分析问题并解决问题的能力。

3．认知方面

（1）让学生体会到数学无处不在，比如小小的数学用表里面蕴藏了莫大的数学问题。

（2）通过举反例，让学生意识到“直观感觉”有时候是不对的。

三、教学内容及重点难点分析

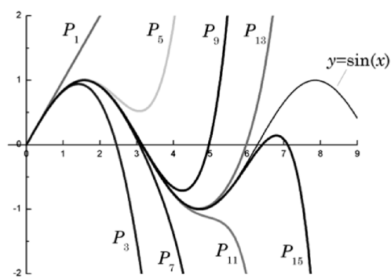
（1）教学内容：泰勒级数的概念及函数展开成泰勒级数的充要条件。

（2）教学重点：采用启发式教学，引导学生逐步找到函数展开成泰勒级数的充要条件。

（3）教学难点：理解函数展开成泰勒级数的充要条件，并利用该充要条件将函数展开成泰勒级数。

四、教学方法和过程

1．教学过程及设计

教学内容	教学设计	教学时长
《中学数学用表》中的数是如何求得的？以三角函数为例进行观察。显然这是由某种近似计算求得的，进而联想到可以用于求近似计算的泰勒公式	由三角函数表为切入点，引入泰勒公式	3 分 7 秒
回顾泰勒公式：$f(x)$ 在某邻域 $U(x_0)$ 有 n+1阶导数，那么在该邻域内，函数 $f(x)$ 在该邻域内可以展开为 n 次泰勒多项式加上 Lagrange 型余项。注意到三角函数在其有定义的点处有任意阶导数，那么，对于这种有任意阶导数的“好”函数，用泰勒公式做近似计算，会有什么现象发生	分析泰勒公式的条件，引入具有各阶导数的函数的泰勒公式	
以正弦函数为例，探究泰勒多项式的近似情况。  演示发现：泰勒多项式次幂越高，近似越好，可以近似的范围越广	通过图像演示，观察具有各阶导数的函数的泰勒多项式近似情况	
提出问题：让泰勒多项式一直写下去，它的图像是否就在(-∞，+∞）上与正弦函数图像重合？这只是一个猜测，因为泰勒多项式一直写下去，将得到一个幂级数，而我们并不知道该幂级数是否收敛到 sin x。该幂级数称之为泰勒级数。给出一般的具有各阶导数函数的泰勒级数的概念	通过观察上述演示，启发学生思考问题，引出泰勒级数的概念	
如果$f(x)$在$U(x_0)$内有各阶导数，称幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$为由 $f(x)$ 在 x_0处生成的泰勒级数，$f(x)$ 称为生成函数，记为 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$。当 x_0=0时，又称为麦克劳林级数	给出泰勒级数的概念，特别提示：此时，该幂级数只是形式的，其与 $f(x)$ 之间目前只是从属关系，而不是相等	1 分 50 秒

续表

教学内容	教学设计	教学时长
我们自然又提出问题：$f(x)$ 与其泰勒级数是否相等	提出问题	
上述问题有的函数成立，而另一些则不然，比如 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，该函数在（-∞，+∞）有各阶导数且 $f^{(n)}(0)=0, n=0,1,\cdots$。该函数的麦克劳林级数在任意点都收敛到 0，显然当 $x\neq 0$ 时，该泰勒级数不收敛到生成函数	举反例，让学生认识到"函数展开成泰勒级数只有各阶导数这个条件是不够的"，进而激发学生进一步思考问题	
进一步提出问题：泰勒级数收敛到生成函数的条件是什么	提出问题	
下面从泰勒公式出发分析问题：首先假设 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，利用泰勒公式，可以证明 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，此时称 $f(x)$ 在 x_0 处可以展开为泰勒级数。这样我们得到泰勒级数收敛到生成函数的充分条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$。 反之，假设泰勒级数收敛到生成函数，利用级数收敛的定义，再结合泰勒公式，可以推得 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，即泰勒级数收敛到生成函数的必要条件	从泰勒公式出发来分析问题，得到泰勒级数收敛到生成函数的充分条件和必要条件	2 分 13 秒
总结以上分析过程，写出定理——函数展开成泰勒级数的充要条件：如果 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有各阶导数，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$	给出函数展开成泰勒级数的充要条件	
利用上述定理，将 $\sin x$ 在 $x_0=0$ 处展开成泰勒级数。求解过程分两步：第一，先求出 $x_0=0$ 的泰勒级数；第二，验证所求级数收敛到 $f(x)$。利用函数展开成泰勒级数的充要条件，只需验证泰勒公式的余项趋于 $0(n\to\infty)$	利用函数展开成泰勒级数的充要条件解题，这种方法可以用于其他函数	2 分 43 秒
利用 $\sin x$ 的泰勒级数展开来近似计算数学用表中的值	函数展开成泰勒级数的应用——近似计算	1 分 3 秒
总结： （1）理解泰勒级数的概念。 （2）掌握函数展开成泰勒级数的充要条件，并会用该充要条件将函数展开成泰勒级数	总结	52 秒

2．教学方法

（1）以课堂教授为主，采取提问、启发、思考等多种教学方法，调动学生的学习积极性，激发学生的学习兴趣。

（2）多媒体教学演示为主，制作中借助于动画进行必要的演示。

五、教学总结

本节课从大家熟悉的《中学数学用表》出发，采用探究的思路逐层递进，引出本节课的重点内容。教学过程中，通过动画演示、多次提出问题和举反例等方式来激发学生积极思考问题，引导学生自觉地投入到教学过程中。最后利用所讲的理论知识求解三角函数表的值，学以致用，使学生看到数学无处不在，感知数学的无穷魅力。

初等矩阵

夏伶莉
北京联合大学

作 品 标 题：初等矩阵
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：初等变换
知识点编码：030201, 030202
授 课 对 象：理工科本科一年级学生
授 课 时 长：15 分 30 秒

参 考 文 献：
[1] 同济大学数学系．工程数学线性代数[M]. 6 版．北京：高等教育出版社, 2014.
[2] 黄廷祝．线性代数与空间解析几何[M]．4 版．北京：高等教育出版社, 2015.
[3] 吕世虎，李军．基本初等矩阵的几何意义及其在教学中的运用[J]．数学教育学报，2008，2.
[4] David C L．线性代数及其应用[M]. 5 版．刘深泉等，译．北京：机械工业出版社, 2011.

一、教学背景

1．课程内容简介

“线性代数”是 19 世纪后期发展起来的一个数学分支，是大学数学课程的重要组成部分，以矩阵为主要工具，以线性方程组为主线，以行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二

次型为基本内容，具有较强的抽象性、逻辑性。

线性代数具有广泛的应用性。例如：运筹学的一个重要内容是线性规划，许多重要的管理决策是在线性规划模型的基础上做出的；电子工程中电路分析、线性信号系统分析、数字滤波器分析设计等需要线性代数，因为线性代数是研究线性网络的主要工具；而光电及射频工程，电磁场、光波导分析等向量场的分析，手机信号处理等也离不开矩阵运算；在图像处理中，大量的图像数据处理也离不开矩阵这个强大的工具。

2．课程总体框架与本节所在位置

第一章　行列式

第二章　矩阵及其运算

　　2.1 节　矩阵

　　2.2 节　矩阵的运算

　　2.3 节　逆矩阵

　　2.4 节　矩阵分块法

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

　　3.1 节　矩阵的初等变换

　　3.2 节　初等矩阵

　　3.3 节　矩阵的秩

　　3.4 节　线性方程组的解

第四章　向量组的线性相关性

第五章　相似矩阵及二次型

二、教学目标

1．知识层面

（1）掌握三种初等矩阵的概念和基本运算。

（2）理解初等矩阵乘法与矩阵初等变换的关系。

（3）了解初等矩阵与初等变换在图形图像处理中的基本应用。

2．能力层面

会熟练运用乘以初等矩阵的方法，将矩阵初等变换的操作转化为矩阵乘法的计算。

3．思维层面

（1）理解数学来源于实际问题，经过抽象与简化，最终更清晰地解释或解决实际问题。

（2）体会“线性代数”课程中知识点在几何层面与代数层面的分层与交汇。

（3）体会数学的简洁、对称与精确之美，体会“万物皆数”的数学文化。

三、教学内容及重点难点分析

1．教学内容

（1）初等矩阵的概念。

（2）初等矩阵的行、列分块表示。

（3）初等矩阵与初等变换的关系，初等矩阵的乘法运算规律。

2．教学重点

（1）合理引入初等矩阵的定义。

“任何一个概念都值得隆重推出!”初等矩阵的概念虽然简单，但如何给学生讲清楚引入的动机是非常重要的，也即第一，我们为什么要讨论矩阵的三种初等变换？第二，我们为什么要将三种初等变换运用到单位矩阵上得到初等矩阵？给学生讲清这些问题，就是本讲教学中首要的重点。此外，将矩阵运算与线性方程组的求解联系起来，将新知识与旧

知识串联起来也是此部分教学的一个重要环节。

（2）引导学生发现初等矩阵与矩阵的初等变换之间的关系。

初等变换法是“线性代数”课程中最重要的一个算法，贯穿于整门课程的教学环节：从行列式的计算到线性方程组的求解，乃至今后矩阵秩的计算、向量组极大线性无关组的求解等问题中，初等变换法均是最行之有效的方法。然而，初等变换法是对矩阵或方程组的一种操作，变换过程需根据具体情况而定，这就需要更精确、更成体系的理论支撑。因此，引导学生发现矩阵乘法与相应初等变换之间的联系，讨论了初等矩阵与初等变换之间的等价关系。其中，初等变换是操作层面，属于实践范畴，而初等矩阵的乘法是计算层面，属于理论范畴。通过这个等价关系，我们将理论与实践这组对立的矛盾体统一起来了。这就是本讲教学中最为重要的一个环节。

3．教学难点与处理措施

（1）如何自然地引入初等矩阵的概念。

处理措施：问题导入，启发式教学；问题收尾，首尾呼应。

矩阵与线性方程组是“线性代数”课程中最核心的内容，而第三章中，主要介绍如何用矩阵来求解线性方程组，Gauss 消元法（矩阵的初等变换法）和求逆矩阵法是两种典型的方法。然而，初等变换法是对矩阵的一种操作，变换过程需根据具体情况而定，这就需要更精确、更成体系的理论支撑。此外，为了进一步研究矩阵可逆的充要条件，以及逆矩阵的一般求法，就需要学习初等矩阵的概念。然而，大多数教材均是直接给出初等矩阵的定义，然后分析其在矩阵求逆中的作用，学生往往印象不深。如何让学生更加深刻地理解并掌握初等矩阵的概念与意义，理解抽象概念之间的内在联系，了解初等矩阵的简单应用，激发学生进一步学习的兴趣和动力，是我们本次课的主要出发点。

我们以两个问题为引入，分别从初等矩阵的应用和线性方程组求解的背景出发，提出问题让学生思考，调动学生进一步探究的兴趣。并且，

经过本讲的讲解和讨论，我们把“线性代数”课程中三个最重要的概念和方法：矩阵、线性方程组和初等变换，三者的内在联系展现给学生，让学生不是孤立地学习一个知识点，而是关联地学习一个知识系统。最后，我们分别回答（或部分回答）了最初提出的这两个问题，首尾呼应。

（2）如何在有限的教学时间内，讲解清楚高阶（n 阶）初等矩阵的乘法运算，从而使学生不要陷入在形式推导的海洋，而能够自然地发现初等矩阵和初等变换之间的关系。

处理措施：循序渐进，统一证明，有抓有放（具体详见第四部分）。

（3）如何讲清倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$的两个容易混淆之处。具体如下：

难点 1 为倍加矩阵的生成方式：行变换与列变换的不同之处。

难点 2 为倍加矩阵乘法的效果：左乘与右乘对应了不同的初等行变换与初等列变换。

处理措施：使用“左行右列”的口诀以及倍加矩阵乘法时所添加的左右箭头，将学生容易混淆的地方“高亮化”“形象化”（具体详见第四部分）。

四、教学创新点与教学理念

（1）对主要结论给出新的统一的证法，对传统教材重组和扩充。

一般 n 阶初等矩阵的乘法运算规律的发现与证明，是本讲中学生的一个重要认知难点。困难之处有两点：其一，对 n 阶矩阵的运算不是很熟悉；其二，三种类型初等矩阵的左乘与右乘运算，一共有 6 种子情形，验证过程耗时太长。针对学生中存在的这些问题，我们做了如下处理：

首先，循序渐进，从特殊到一般。先从一个 3 阶对换矩阵与列矩阵的乘积为例，讲明白讲透彻，扩展到 3 阶对换矩阵与任意一个三行的行分块矩阵乘积的情形，再扩展到一般的 n 阶情况。

其次，在证明过程中，利用分块矩阵的思想，我们对于所有子情形给出了一种统一的证明方法，一方面避免了逐一验证的烦琐过程，大大提高了效率；另一方面，将矩阵乘法的过程通过分块的方式分拆化简，

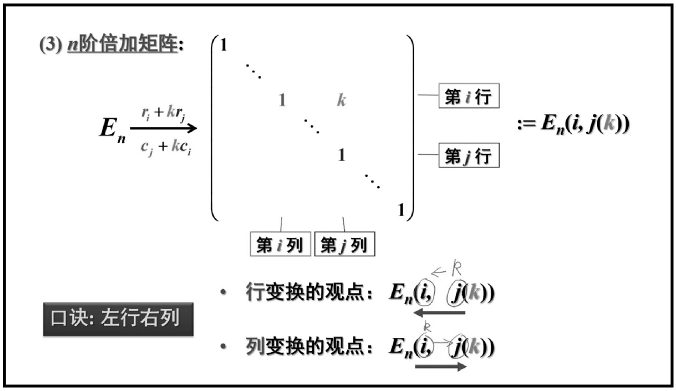
更加直观明了的同时，也把验证的过程转变为证明推导的过程。

最后，有抓有放，带领学生在课堂上详细推导一种子情形（倍加矩阵的左乘），对于其他子情形（对换矩阵和倍加矩阵的左乘，以及三类初等矩阵的右乘）只给出结论，把具体验证留作课后习题。这样可以保留学生课后独立探索的空间，让其自己发现其中的运算规律，而不是完全嚼烂了告诉给学生。

（2）“左行右列”的口诀配以箭头标识，画龙点睛，一语三关，简洁明了地概括了一个知识重点与两个认知难点。

在本讲教学中，学生初学时，对倍加矩阵的认知是一个难点。具体又分为以下两点：其一，倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$的生成方式，与其他两类初等矩阵不一样的是，它的行生成方式与列生成方式是不同的。从行变换的观点，它是将单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上；而从列变换的观点，它是将单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上。其二，倍加矩阵乘法运算的效果，与其他两类初等矩阵不一样的是，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘与右乘它所对应的行变换与列变换的方式是不同的。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上；而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上。

针对以上学生的认知难点，我们做了如下处理：用“左行右列”的口诀配以左右箭头的标识，具体来说，从生成方式来看，行变换的观点下，就在 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$的下方画一个左箭头（如下图），这就相当于沿着箭头的方向，将 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，概括为“左行”；列变换的观点下，就在 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$的下方画一个右箭头（如下图），这就相当于沿着箭头的方向，将 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上，概括为“右列”。同样地，从乘法效果来看，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$时，左乘画左箭头，这表示沿着箭头的方向将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$时，右乘画右箭头，这表示沿着箭头的方向将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上。



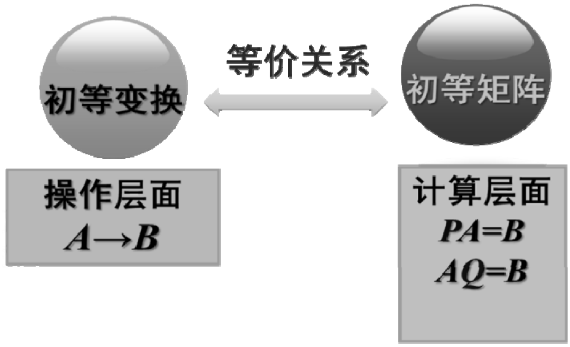
这样的处理方式，将学生容易混淆的地方“高亮化”“形象化”，力图让数学概念和推导过程有了形象元素的类比，使得抽象的数学概念“看得见也摸得着”，破解分歧与混淆点的同时也让学生在学习数学的过程中，不再觉得枯燥和深奥。此外，口诀“左行右列”一语三关，简洁明了地概括了一个知识重点（初等矩阵与初等变换的关系）以及两个认知难点（倍加矩阵的产生方式与倍加矩阵乘法的效果），是对本讲知识点最精练的总结和概括。

（3）带领学生从多个角度认知，达到理论与实践的统一，数学与哲学的统一。

初等矩阵的乘法运算与矩阵的初等变换之间的关系是本讲的主定理，也是最核心的内容。在传统教学中，此部分的讲解主要是以验证为主，但我们的教学设计中，除了给予必要的验证外，更加强调两件事情的对立与统一。从引入时提出：

$$A \to B \quad 并非 \quad A = B$$

强调两件事的对立之处。到后来验证到主定理后，再用下述图表的方式，说明初等变换属于操作层面，代表具体实践；而初等矩阵的运算属于计算层面，代表理论推导，它们实际上是一件事情的不同层面，只不过各有侧重而已。并且引用经典古诗词“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，引导学生从不同角度来认知。



进一步，由数学提升到哲学层面，告诉学生：实践与理论在哲学上是对立统一的。人们总是通过实践总结出理论，反过来再用理论指导实践。实践的发展推动理论的深入，反过来，理论的发展又可指导更多更广的实践活动，初等变换与初等矩阵亦是如此。

（4）以实际应用为切入点，用直观形象的方式，展现数学的实用性和指导性，提高学生学习理论知识的兴趣，扩宽课程的涉及面。

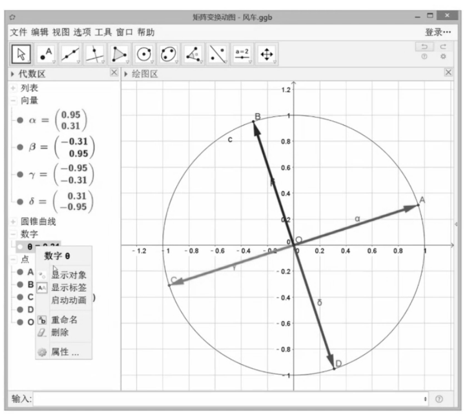
线性代数是一门古老的基础学科，经过几百年的积累和发展，已经形成了一套自成体系的具有高度抽象化和形式化语言的独立学科。学生在学习过程中往往容易“身陷符号形式推导的海洋”，如不穿插说明基础理论的应用性，学生就容易渐渐地失去学习的兴趣和动力。而学生在学习数学基础课程时，相对于现阶段所学的基本理论，更感兴趣的是所学的理论知识在现代生产生活中有何用?

基于以上原因，我们在课堂教学中，有意识地进行引导，注重理论应用部分的展示，通过贴近生活的实际应用案例，或通俗易懂地展示基础理论在生产生活中，特别是最新的科技成果中的应用，可帮助学生更加深刻理解相关理论，开阔学生的视野，激发其学习的主动性和热情，真正达到“学以致用”。

具体在本讲中，我们一开篇首先就抛出了“归乡的机器人”的图像处理过程中的问题，在介绍了“初等矩阵”这一抽象概念与相关理论之后，我们利用之前的结果，揭示了完成上述图像处理操作的数学原理和

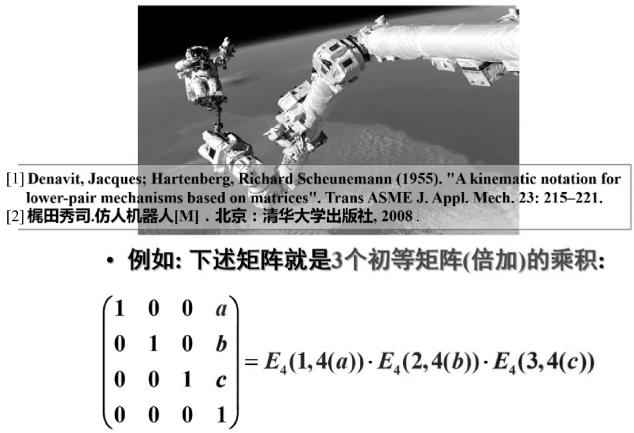
数学方法。利用此方法，同学们可以对任意图片进行批处理。

其次，我们利用数学作图软件 Geogebra，采用数学建模的方式，带领学生一步一步地用图形模拟了风车的四个叶片。其中，在画出第一个叶片之后，其他三个叶片均是利用左乘初等矩阵的乘积而得到的。进一步，为了让风车转动起来，依然是利用了左乘若干个初等矩阵的方式。以上两个过程分别体现了初等矩阵在图形模拟与图形变换中的实用性。最后我们还把转动的风车和模拟图形同框放映，从视觉上给了学生刺激，调动了学习积极性。



最后，我们还介绍了初等矩阵在机械控制学中操作链式机械手臂的应用。在该领域中 D-H (Denavit－Hartenberg)参数法是控制机械臂的常用方法，该方法通过若干 4 阶矩阵控制机械臂完成指定的动作。由于篇幅

与时间的限制，我们只介绍了控制平移操作的 4 阶矩阵，并把它表示为三个 4 阶初等矩阵的乘积形式，并鼓励感兴趣的学生课下进行扩展了解，这大大激发了学生的学习热情，同时也扩宽了课程的涉及面。



（5）新媒体技术与传统教学方式相结合，发挥微课的优势。

在本微课作品中，我们充分发挥了新媒体技术的优势，对很多抽象的数学概念和推导的过程，均给出了形象元素的类比，使得抽象的数学概念“看得见也摸得着”，力图让学生在学习数学的过程中，不再觉得枯燥和深奥。具体措施如下：

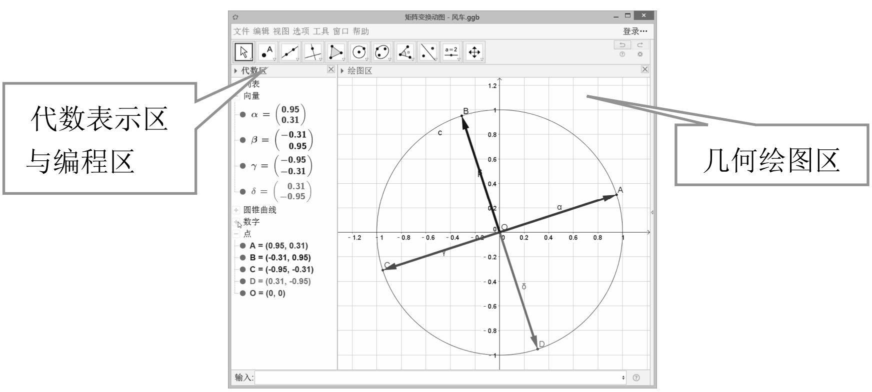
① 创新性地加入了以参赛教师为原型的卡通漫画形象，拉近了与青年学生的距离。

② 以风靡全球的经典动画电影《天空之城》中的机器人“拉普达”

为原型，配合以经典的背景音乐，引入“归乡的机器人”问题。开篇极大地吸引了学生的注意力，并适时将这一过程与矩阵的初等行变换相联系，从而引入初等矩阵的概念。

③ 动画的方式形象呈现初等矩阵的生成过程。由于初等矩阵是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 经过三种初等变换变化得到的，在传统的教学中，只能用口述的方式说明，而在本微课中，我们对三种初等矩阵的行列生成方式都用动画的方式实现，直观形象，给学生留下了深刻印象，对传统教学方式做了很好的补充。此外，我们在介绍初等矩阵的应用时，也采用了风车的动图与机械手臂工作的动图。

④ 使用编程作图软件 Geogebra，带领学生一步一步用图形模拟风车的四个叶片。该软件的好处在于左边是代数表示区与编程区，右边是几何动图表示区。插入到微课中，既能让学生形象地看到动图，又能准确地表示出动图实现的代数过程。



⑤ <u>可汗学院模式：手写笔迹写写画画</u>，还原数学推导中火热的思考过程。可汗学院是迄今最成功的 MOOC 模式。而清华大学白峰杉教授曾建议数学微课要采用手写笔迹，这是数学课最大的特点。在本微课中，我们在多个地方，特别是主定理的证明中，采用了手写笔迹的方式，将板书推导和 PPT 相结合，将数学推导过程中火热的思考过程一一还原出来，紧紧抓住学生的注意力。

例. 3阶对换矩阵的乘法 (左乘):

$$E_3(1,2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{e}_2a_1+\vec{e}_1a_2+\vec{e}_3a_3$$

$$=a_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_3\end{pmatrix}$$

$$E_3(1,2)\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}}_{A}=(\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\vec{e}_2\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\vec{e}_1\vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\vec{e}_3\vec{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\vec{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\vec{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

五、教学过程设计与授课方式

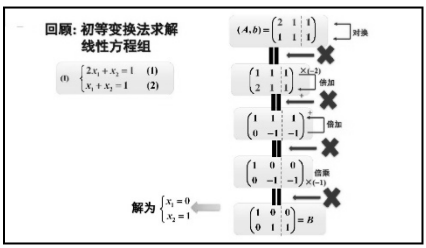
1．教学过程总框架

序　号	内　容	时　间
1	§1.问题的引入	3 分钟
2	§2-1.初等矩阵的概念	3 分钟
3	§2-2.初等矩阵的分块表示	1 分钟
4	§2-3.初等变换与初等矩阵的关系	4 分钟
5	§3-1.初等矩阵在图像处理中的应用	1 分钟
6	§3-2.初等矩阵在图形模拟与变换中的应用	2 分钟
7	§3-3.初等矩阵在机械臂控制中的应用	0.5 分钟
8	§4.总结与拓展	1 分钟

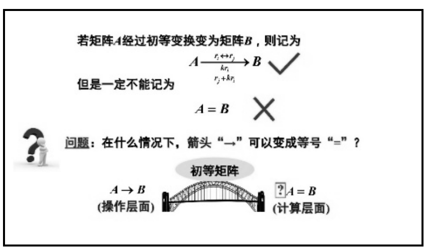
2．教学过程详细内容

§1. 问题的引入---（3 分钟）

- 开篇分别从应用与理论两个方面，各提出一个问题，引入初等矩阵的概念。
- 问题 1：对一幅“归乡机器人”的图片做了简单的处理之后，天上出现了机器人的影子，好像机器人回家了一样，得到了机器人梦想归家的效果。设问：“归乡的机器人”可以通过何种数学运算来实现？目的在于提起学生学习新知识的兴趣。

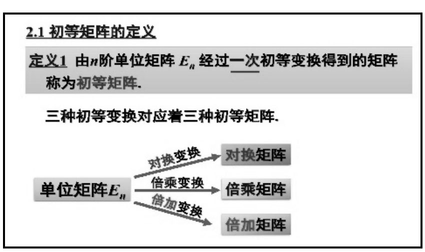


- 用初等变换法求解我们熟悉的二元线性方程组，目的有两个：
- 第一，帮助同学们复习一下初等变换的定义；
- 第二，通过对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，让学生发现矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一次初等变换后变成 $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，但一定不能记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

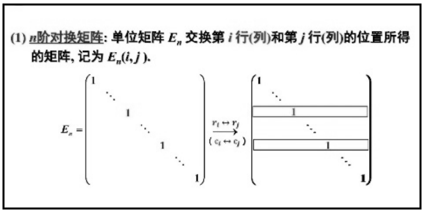


- 问题 2：在什么情况下，上述等号成立呢？
- 此部分设置问题，抛出悬念，带着问题和兴趣继续课程的学习。
- 用比较形象的桥梁方式，引入“初等矩阵”，并且把课程中重要概念的内在联系展现给学生，让学生不是孤立地学习一个知识点，而是关联地学习一个知识系统。

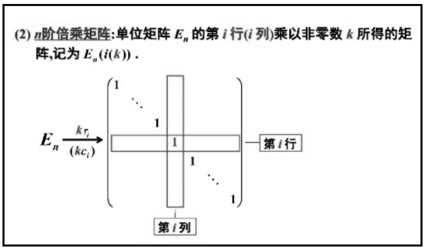
§2-1.初等矩阵的概念--（3 分钟）



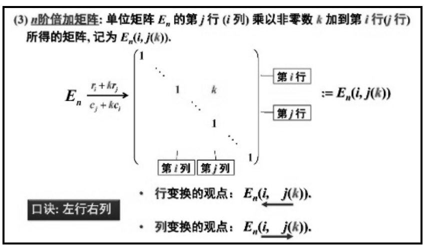
- 直接给出初等矩阵的定义，明确了三种初等变换对应着三种初等矩阵。
- 给出抽象的定义之后，下面具体给出 3 种 n 阶初等矩阵的具体形式。



- n 阶对换矩阵：
- 单位矩阵 E_n 交换第 i 行和第 j 行所得的矩阵。
- 同样，单位矩阵 E_n 交换第 i 列和第 j 列也可得到同一对换矩阵。

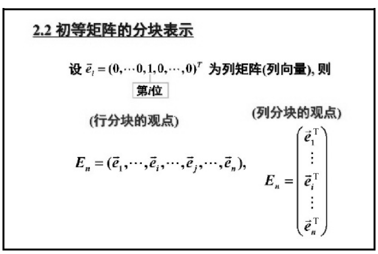


- n 阶倍乘矩阵：
- 单位矩阵 E_n 的第 i 行乘以非零数 k 所得的矩阵。
- 同样，单位矩阵 E_n 的第 i 列乘以非零数 k 也可得到同一倍乘矩阵。

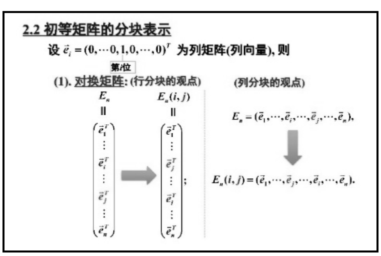


- n 阶倍加矩阵：
- 由于倍加矩阵的生成方式有些复杂，也是学生容易混淆的地方，因此引入了口诀“左行右列”以及左右箭头的方式，帮助学生理解并记忆。
- 这是本讲内容的一个特色。

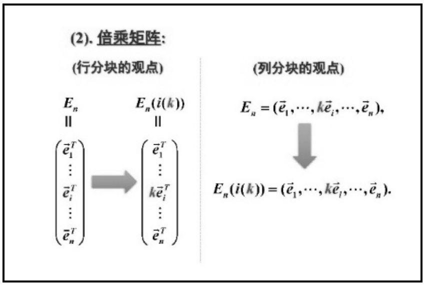
§2-2.初等矩阵的分块表示-------------------------------------（1 分钟）



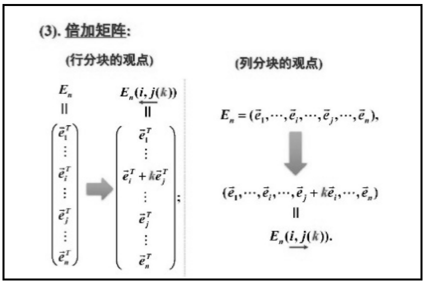
- 为了后面证明的需要，进一步讨论了初等矩阵的分块形式。
- 首先，引入列矩阵 e_i 的概念，也即自然基的概念。
- 给出单位矩阵 E_n 的行分块形式与列分块形式。



- n 阶对换矩阵：
- 行分块与列分块。

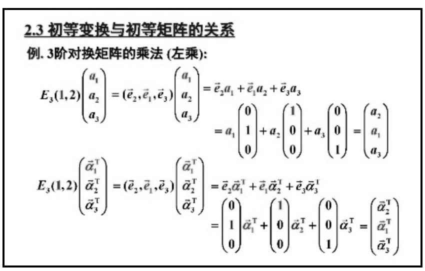


- n 阶倍乘矩阵：
- 行分块与列分块。

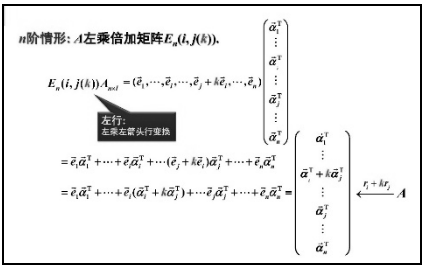


- n 阶倍加矩阵：
- 行分块与列分块形式。
- 利用刚才给出的口诀“左行右列”以及左右箭头的方式，快速写出分块表示。

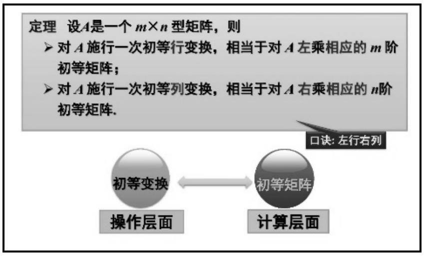
§2-3. 初等变换与初等矩阵的关系------------------------------（4 分钟）



- 初等变换与初等矩阵之间的关系是本讲的一个重点。
- 首先用一个具体的 3 阶对换矩阵左乘一个列矩阵，利用之前讨论的初等矩阵的分块表示法，分拆化简乘积过程，为后文做准备。
- 观察得到的结果：左乘对换矩阵相当于对列矩阵做相应的行变换。引导学生猜测是否是一般规律?
- 进一步将这一方法推广到左乘一个 3 行的矩阵的情形，方法同前。

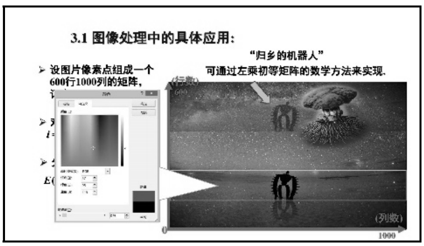


- 推广到一般的情形，即 n 阶初等矩阵左乘（右乘）矩阵 $\boldsymbol{A}$。
- 以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘倍加矩阵为例，详细推导。
- 方法同前，同时引入“左行右列”口诀配以箭头标识，解释倍加矩阵的乘法效果和其生成方式一致。
- 对于其他子情形的结果请同学课后自行验证。



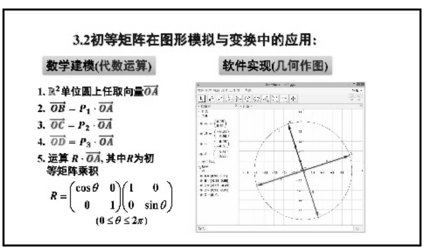
- 总结得到主定理。
- 引入“左行右列”口诀。
- 操作层面与计算层面的解释。

§3. 初等矩阵的应用---（3.5 分钟）



- 回到课程开始提出的问题“归乡的机器人”可以通过何种数学运算来实现？
- 坐标系的建立，RGB 颜色的解释与问题简化。
- 通过左乘倍加矩阵就能达到“归乡机器人”梦想归家的效果。

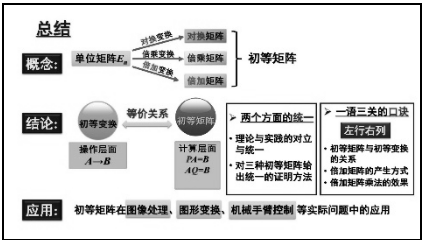
- 初等矩阵在图形模拟与图形变换中的应用。
- 放映真实风车转动的动图。
- 让同学们利用刚刚学习的初等矩阵的知识去实现风车叶片的转动效果，让同学们感受数学的精巧。



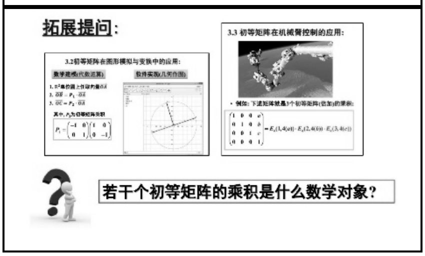
- 利用数学编程作图软件 Geogebra，一步一步带领学生在平面上画出四个向量，模拟风车的四个叶片。
- 为了让向量转动起来，再利用初等矩阵构造旋转变换。
- 动图展示，并与原风车动图同框对比。

- n 阶倍加矩阵。
- 由于倍加矩阵的生成方式有些复杂，也是学生容易混淆的地方，因此引入了口诀“左行右列”以及左右箭头的方式，帮助学生理解并记忆。
- 这是本讲内容的一个特色。

§4. 总结与拓展--（1 分钟）



- 知识点总结：回顾本节课的知识要点，让学生对本节的内容一目了然，了解需要掌握的知识。
- 知识的提升：两个方面的统一，一语三关的口诀。



- 回顾刚才的应用，我们发现用到了几个初等矩阵乘积的形式。
- 拓展问题：若干个初等矩阵的乘积是什么样的数学对象?
- 利用这一提问，引出下一节课的内容，起到承上启下的作用。

- 结束语。
- “归乡的机器人”为背景，首尾呼应。
- “数学之精确，数学之精巧，数学之精彩”，从知识层面到思维价值层面的提升。

等周不等式

刘白羽

北京科技大学

作品标题：等周不等式

所属课程：大学数学应用案例

授课对象：理工科高年级本科生

授课时长：15 分钟

参考文献：[1] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京：北京大学出版社，2001.

[2] 陈维桓. 极小曲面[M]. 大连：大连理工大学出版社，2011.

[3] https://www.youtube.com/watch?v=jReQUm9EB9k.

一、教学背景

等周不等式是平面曲线重要的整体性质之一，与其密切相关的等周问题具有悠久的研究历史，并且和日常生活中的肥皂膜有直接联系。本微课从一个肥皂膜的实验开始，引出等周问题，便于学生理解、激发学生的学习兴趣。应用高等数学的知识来对实验中观察到的现象进行解释，理工科的高年级本科生应能听懂理解。等周问题和等周不等式相关的问题，如流形上的等周常数等，至今仍然是数学研究的热点之一。

二、教学目标

通过视频内容的学习，应理解等周问题与等周不等式的转化关系、等周不等式的条件和结论，掌握等周不等式基于微积分的基本证明方法，能够在今后的学习和研究中应用等周不等式去解决实际问题。

三、教学内容及重点难点分析

1．主要内容

（1）等周问题。
（2）等周问题的直观讨论。
（3）等周不等式。
（4）等周不等式的严格证明。
（5）推广与拓展。

2．教学重点

（1）等周问题的直观讨论。
（2）等周不等式的严格证明。

3．教学难点

（1）如何理解等周问题直观讨论的不严格性。
（2）等周不等式的严格证明方法的数学逻辑。

四、教学方法和过程

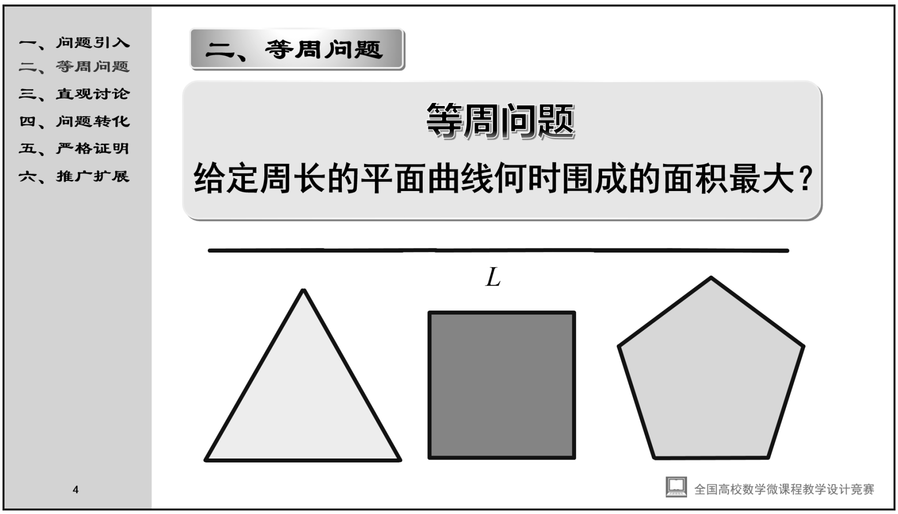
1．问题引入

在一个铁丝圈中固定一个棉线圈，把整个铁丝圈浸入到肥皂液中，取出后铁丝圈上张出了一张肥皂膜。将棉线圈中的肥皂膜戳破，可以观察到棉线圈呈现出了一个圆形。为什么会产生这样的现象呢？

物理中的结果告诉我们，在张力的作用下，肥皂膜稳定时其面积将达到最小。而外侧的铁丝围成的面积是一定的，铁丝与内侧的棉线之间的肥皂膜面积达到最小，那就意味着棉线围成的区域面积应达到最大。那么，棉线围成的区域为什么会呈现实验中的圆形呢？

2．等周问题

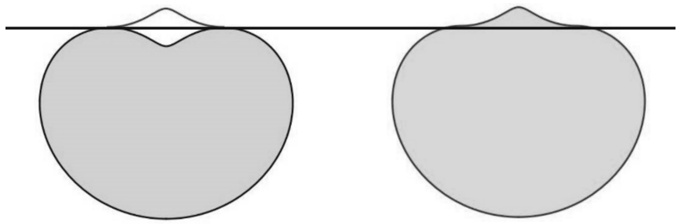
由于棉线圈的周长是一定的，寻求什么样的图形将使其围成的区域面积最大，在数学上就是等周问题。



3．等周问题的直观讨论

在达到最大面积的曲线存在的前提假设下，瑞士数学家施泰纳（Jacob Steiner）采用综合分析法，给出了等周问题的答案。他考虑了达到最大面积的曲线应满足的性质。

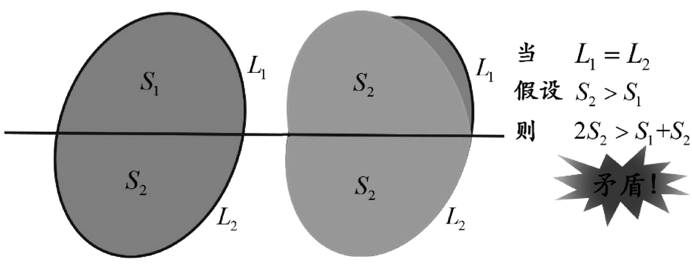
首先考虑达到面积最大的曲线的凹凸性。观察下图左侧的曲线，该曲线能否作为达到最大面积的曲线？



分析：左侧的曲线是非凸曲线。如果左侧曲线是达到最大面积的曲线，那么可以将其凹的弧线部分沿切线进行对称翻折，从而得到一条与原曲线具有相同周长的新曲线（右侧图形），并且该曲线围成的图形面积更大。因此左侧的曲线不能作为达到最大面积的曲线。对上图右侧曲线继续做对称翻折的操作，可将其逐步变为凸曲线，在此过程中，曲线围成的面积不断增大。从而得到如下的结论。

结论一 凸性：给定周长，达到最大面积的曲线一定是凸曲线。

进一步，观察下图左侧曲线，假设其就是达到最大面积的凸曲线。若用割线将其分成弧长相同$(L_1 = L_2)$的上下两段曲线，曲线围成的面积也被分成了上下两块S_1, S_2，这两块面积是否有大小关系？



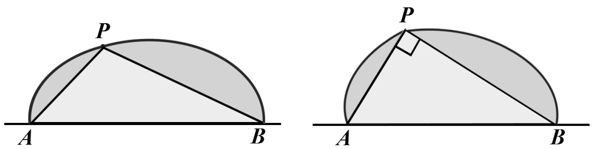
分析：如果分成的两块面积不等，那么可以通过对称翻折将面积大的那块翻折后代替面积小的那块，得到一条周长与原曲线相同，围成更大面积的曲线。这就和原曲线达到最大面积矛盾！因此有如下结论。

结论二 对称性：当用割线将达到最大面积的曲线分成等弧长的两段，围成的面积也相应分成了相等的两块。

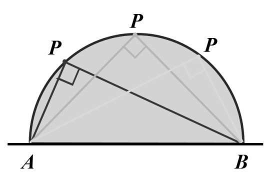
$$L_1 = L_2 \Longrightarrow S_1 = S_2$$

根据结论二，接下来只需要观察上半部分的图形即可。

达到最大面积的曲线的上半部可以是下图左侧的上半椭圆吗？

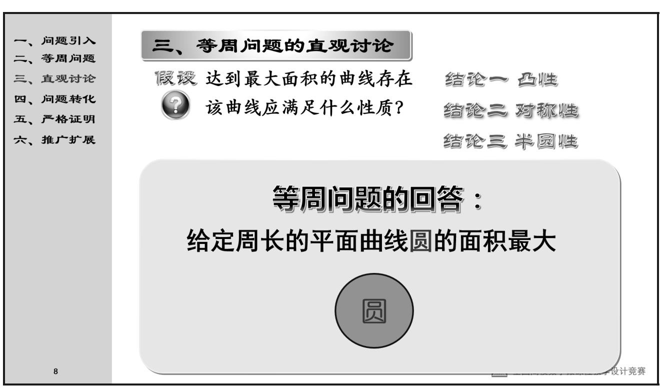


分析：在曲线上任取一点 P ，如果 $\angle APB$ 不是直角，那么可以保持上图中阴影部分图形形状不变，将 $\angle APB$ 弯成直角，得到的图形（上图右侧）和原图形（上图左侧）具有相同的弧长，但是围成的面积更大。因此，在达到最大面积曲线的上半部分任取曲线上一点 P ， $\angle APB$ 都是直角。



从而得到如下结论。

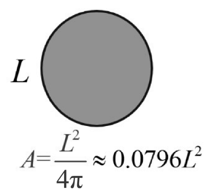
结论三 半圆性：达到最大面积的曲线的上半部分是半圆。



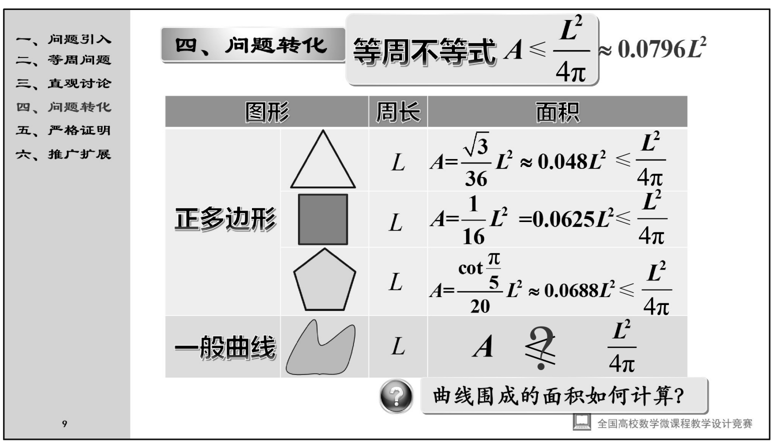
综合三个分析结论，我们得出给定周长达到面积最大的曲线应是凸曲线，具有对称性，并且其一半是半圆。由此便可得出等周问题的回答：给定周长的平面曲线圆的面积最大。

4．等周不等式

前面关于等周问题的直观讨论虽然给出了等周问题的答案，但是却不能作为其数学上严格的证明。原因是其做了一个前提假设，即达到最大面积的曲线是存在的。只有用近代的数学方法才能得到等周问题严密的证明，需要先将其转化为一个与其等价且便于定量分析的数学问题。



如果平面曲线的周长给定了，那么其围成的面积自然就不能任意大，也就是说该面积有一个能由其周长表示的上界。对于多边形，利用中学的知识就可以算出其面积与周长的关系。



注意到周长为 L 的圆的面积为 $\dfrac{L^2}{4\pi}$，而周长为 L 的多边形的面积都满足的

关系：$A \leqslant \dfrac{L^2}{4\pi}$。等周问题也就等价于如下的等周不等式。

等周不等式：对任意简单闭曲线，若其周长为L，围成的面积为A，则有

$$A \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

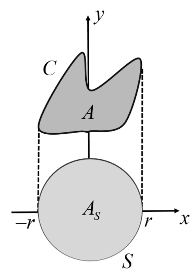
（等号成立当且仅当曲线为圆。）

5．等周不等式的严格证明

下面我们介绍 E. Schmidt（1939）给出的等周不等式的基于微积分的证明(参见文献[1])。

对于给定的光滑的平面简单闭曲线C，建立坐标系使得C在x轴的投影为$[-r,r]$。设曲线C的参数方程为

$$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\quad t \in [0,L]$$



其中，L为曲线C的周长，t为弧长参数。

作一个与曲线C相同宽度的辅助圆S，其一般方程为$x_S^2 + y_S^2 = r^2$。选择以曲线C的弧长参数t为参数将S做参数化，得到圆S的参数方程为

$$S:\begin{cases} x_S = x(t) \\ y_S = \pm\sqrt{r^2 - x^2(t)} \end{cases}, t \in [0,L]$$

由格林公式得推论知，C围成面积

$$A = \int_0^L xy'\mathrm{d}t$$

圆S的面积为

$$A_S = \pi r^2 = -\int_0^L y_S x_S' \mathrm{d}t = -\int_0^L y_S x' \mathrm{d}t$$

两式相加得

$$A + A_S = A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - y_S x')\mathrm{d}t$$

德国数学家

Erhard Schmidt

（1876—1959）

$$
\begin{aligned}
&\leqslant\int_0^L |xy'-y_Sx'|\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^L \sqrt{(x^2+y_S^2)((x')^2+(y')^2)}\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^L \sqrt{(x_S^2+y_S^2)((x')^2+(y')^2)}\mathrm{d}t\\
&\leqslant Lr
\end{aligned}
$$

这里,利用了柯西不等式,且由于 t 为弧长参数,因此 $(x')^2+(y')^2=1$,以及根据参数的选择有 $x_S=x(t)$ 。

于是，得到 $A+\pi r^2\leqslant Lr$ 。再利用均值不等式可得

$$\sqrt{A\cdot\pi r^2}\leqslant\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\leqslant\frac{1}{2}Lr$$

两边平方并消去 r，即得等周不等式。

6．推广与拓展

平面等周问题可以转化为如下的泛函约束极值问题，约束条件对应于曲线的周长为 L，目标函数对应于面积最大化。

$$
\begin{aligned}
&\max A=\max_{x,y}\int_0^L xy'\mathrm{d}t\\
&\text{s.t.}\quad \int_0^L\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t=L
\end{aligned}
$$

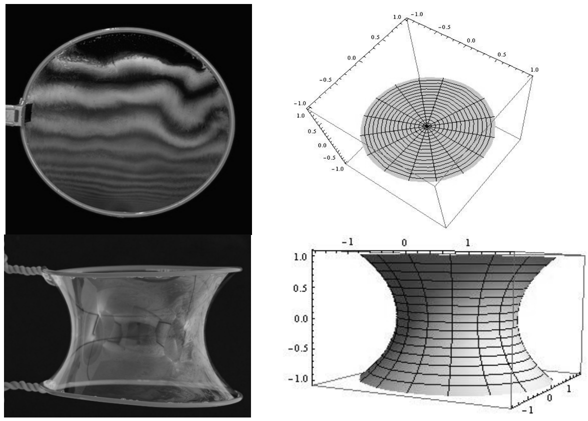
我们将这个问题拓展一下，给定空间中的一条封闭曲线 C，寻求以曲线 C 为边界的面积最小的曲面。这就是著名的普拉图问题，它也可表示成一个泛函约束极值问题。

$$
\begin{aligned}
&\min A=\min_{f}\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\text{s.t.}\quad \partial M=C
\end{aligned}
$$

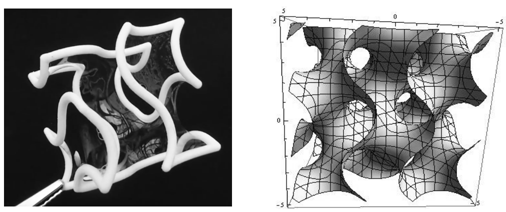
这里 M 为曲面 $z=f(x,y)$ 。使得这个泛函约束极值取到极小的曲面成为极小曲面。

回到最初的肥皂膜的实验，我们知道稳定的肥皂膜达到面积最小，也就是说如果把铁丝弯成曲线 C 的形状，这样的形状的铁丝上张出的肥皂膜就是一个极小曲面。下面我们来看几个极小曲面的例子。如果给定的边界曲线是平面上的闭曲线，那么可以想象，我们得到的肥皂膜也在

一个平面上。这就是最简单的极小曲面，平面。



如果用两个铁丝圈作为边界，可以张出悬链面。悬链面是一种具有旋转对称性的极小曲面。还有我们熟悉的 Mobius 带和螺旋面，也都是极小曲面。



此图片选自参考文献[3]

左图中的极小曲面不太常见，它是螺旋 24 面体，可以用方程 $\sin x\cos y+\sin y\cos z+\sin z\cos x=0$ 来近似表示。这个极小曲面最近被用到了材料学中。2017 年 3 月，MIT 的研究人员将石墨烯加热加压后，做成螺旋 24 面体的形状。获得了现今最轻最坚固的材料之一。这种材料质量只有钢的 5%，但是却比钢坚固 10 倍。

感兴趣的同学可以动手做一下肥皂膜的实验，来找找还有什么样的极小曲面。

五、教学总结

本微课为大学数学应用案例，利用高等数学的知识，来解释一个肥

皂膜实验中观察到的现象。对应的数学问题其实就是具有悠久历史的等周问题。其后，通过等周问题的直观讨论，得到了给定周长的平面闭曲线圆围成的面积最大的结论，从而自然地引出等周问题等价的表述形式：等周不等式。此后，利用高等数学中的格林公式的推论给出了等周不等式的严格数学证明，也即是等周问题的严格证明。最后，回到肥皂膜的实验，简单介绍等周问题相关拓展知识——极小曲面。

整个微课的讲授过程由浅入深，便于学生理解，并且从实验出发，激发学生的学习兴趣。

投掷项目的最佳出手角度

李翰君
北京体育大学

作品标题：投掷项目的最佳出手角度
所属课程：大学数学应用案例
授课对象：运动人体科学本科
授课时长：15 分钟
参考文献：Linthorne N P. Optimum release angle in the shot put[J]. Journal of Sports Sciences, 2001,19(5): 359-372.

一、教学背景

抛体运动的简单模型中，45°射程最远。但在奥运会级别的运动员中，投掷的出手角度均低于 45°，铅球、铁饼、标枪在 26°～41°之间，足球掷界外球的出手角度在 23°～37°之间，跳远的起跳角度只有 15°～27°。为什么理论与实践有这么大的差距？

二、教学目标

通过投掷最佳角度的案例教学，使学生掌握数学建模的基本思想、基本方法；培养学生联想、洞察能力、综合分析能力，激发学生的学习积极性，培养学生应用数学解决实际问题的能力。

三、教学内容及重点难点分析

1．教学内容

（1）最简单的最佳出手角度模型（抛点与落点同高的斜抛运动）。

（2）考虑出手高度的最佳出手角度模型（抛点比落点高的斜抛运动）。

（3）考虑人的限制因素的最佳出手角度模型（改变出手角度，出手速度随之改变）。

（4）模型的应用：个体化的最佳出手角度、跳远的最佳起跳角。

2．重点难点分析

（1）重点：让学生明白数学建模的过程是从简单到复杂多次循环的过程。

（2）难点：为学生创设一个使用数学的环节，为学生自主学习、自主探索、自主提出问题、自主解决问题的机会。

四、教学方法和过程

（1）引导学生分析问题的背景。为什么体育运动中抛体运动，并没有遵循 45°射程最远的原则。

（2）让学生明白数学建模的过程是从简单到复杂多次循环的过程。从最简单的斜抛运动模型入手，逐渐增加影响因素（如出手高度），最终考虑人的限制因素（垂直速度的增加，以水平速度的损失为代价）。

（3）模型的应用。①个体化的最佳出手角度。随出手角度增加，出手速度损失大的运动员，最佳出手角度会小；速度损失小的运动员，最佳出手角会大。②通过敏感度分析得到，最佳出手角度是允许一定误差的。在确定最佳出手角度后，运动员和教练员的主要精力就应该是增加速度。③同样的建模思路可以用于预测跳远项目的最佳起跳角。

（4）课后提供了一个已经填好公式的 excel 表格。改变初始条件（如出手高度、速度以及出手速度与出手角度的回归方程），自动获得最佳出

手角度和相关曲线。方便学生探索最佳出手角度。

五、教学总结

在真实投掷运动中，最佳出手角度通常不是 45°，最重要的原因是在不同角度下，人不可能保持速度不变。随着出手角增加，出手速度会下降。当我们获得个体化的出手角度增加与速度减少的关系后，可以代入数学模型，获得这名运动员最佳的出手角。通过敏感度分析得到最佳出手角度是允许一定误差的。在确定最佳出手角度后，运动员和教练员的主要精力就应该是增加速度。

违约概率损失的后验极大似然估计

刘洪伟
北京物资学院

作品标题：违约概率损失的后验极大似然估计
所属课程：大学数学应用案例
相关知识点：分布函数；Bayesian 公式
授课对象：统计类高年级本科生
授课时长：15 分 9 秒
参考文献：[1] 茆诗松，程依明，濮晓龙. 概率论与数理统计教[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2004.
[2] 余胜威. Matlab 数学建模经典案例实战[M]. 北京：清华大学出版社，2015.

一、教学背景

2008 年经济危机席卷全球，金融业，特别是银行业受到的冲击最大。因此 2011 年年底，Basel 委员会公布了《更具稳健性的银行和银行体系的全球监管框架》及《流动性风险计量、标准和检测的国际框架》,标志着全球银行业迈入了 Basel III 时代。Basel III 提出了宏观审慎和微观审慎两方面的监管思路，重构了银行业的金融监管框架，对银行风险管理、资本管理、流动性管理等工作带来了巨大挑战和压力。新协议强调内部评级法（Internal Rating Based Approaches，IRB）在风险管理和资本监管

中的重要作用，倡导国际活跃银行基于内部数据和管理标准，建立包括客户评级和债务评级的两维评级体系，以增强风险计量的精确性、敏感性和标准化。违约概率PD（Probability of Default）和违约损失率LGD（Loss Given Default）分别是客户评级和债务评级的定量基础，两者构成了IRB法的核心变量。目前全球只有很少的银行能够提供可靠的LGD估计值。本案例介绍一种充分考虑从业多年的专家经验与定量方法相结合的贝叶斯（Bayes）计量方法。

二、教学目标

（1）掌握贝叶斯公式，注意区分识别先验概率、后验概率，学会非正态分布的检验。

（2）掌握三角分布，Beta 分布，先验概率的处理方法。

三、教学内容及难点分析

1．教学内容

（1）数据的选择和预处理，分布性检验。

（2）三角分布、Beta 分布以及先验概率的构造。

（3）似然函数的计算，以及求解后验概率时采用的约束优化方法。

2．难点分析

难点：贝叶斯公式的先验概率、后验概率的求解，似然函数的近似计算。

四、教学方法和过程

1．教学方法

（1）以概念讲授为主，适当穿插提问和思考等互动教学方式。

（2）以多媒体课件为主，借助动画演示进行必要的启发和推导。

2. 教学过程

（1）引入。

PD和LGD都是反映债权方面临债务方违约的信用风险的重要参数，因此，两者都受到债务方信用水平的影响。

目前全球只有很少的银行能够提供可靠的LGD估计值。常用的计量方法有：①历史数据平均法；②数据回归分析法；③隐含数据分析法；④现金流分析法等。以上方法基本上都是定量的分析。本案例介绍一种充分考虑从业多年的专家经验与定量方法相结合的Bayes计量方法。

（2）数据描述。

本案例选用的数据源于文献 Benjamin & Wright（2009, Recovery before Redemption: A Theory of Delays in Sovereign Debt Renegotiation.）及穆迪投资服务公司（2013），研究对象是发展中国家从1979年到2013年国债违约LGD。对于同期不同源的数据采用算术平均计算最终的LGD，最终共获得90个数据集记为A，删除9个LGD为0的数据集记为B。由于LGD数值位于0~1之间，因此假设其服从正态分布显然不合理。下表是对数据集A和B做Beta分布性检验。

Test statistic	$0 \leqslant LDG < 1, N = 90$		$0 \leqslant LDG < 1, N = 81$	
	p-value	Pass/Fail	p-value	Pass/Fail
Kolmogorov-Smirnov	$1.5e-42$	Fail	0.3023	Pass
Anderson-Darling	$6.7e-06$	Fail	0.3193	Pass
Cramer-Von Mises	$1.0e-03$	Fail	0.3072	Pass
Chi-Square Goodness	$3.9e-66$	Fail	0.2389	Pass

由检验的结果可知，对于数据集B来说，不能拒绝数据服从Beta分布。

Beta 分布是有界连续型随机变量的概率密度函数，在机器学习和数理统计学中有重要应用。Beta分布的密度函数是

$$X \sim \mathrm{Beta}(x;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\alpha>0\quad \beta>0$$

其中 α,β 为 Beta 分布的参数，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数，其定义为 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 。若 $X\sim \mathrm{Beta}(x;\alpha,\beta)$ ，则期望、众数、方差分别为 $E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$M(X)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$, $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$。

（3）方法描述。

本案例采用贝叶斯方法进行估计，贝叶斯公式如下：

$$f(\Theta\,|\,x)=\frac{f(x\,|\,\Theta)}{f(x)}f(\Theta)$$

其中 Θ 为待估参数集，x 为观测到的历史数据。$f(x)$ 为基于历史数据的经验分布函数；$f(x\,|\,\Theta)$ 是参数集 Θ 条件下的概率密度函数；$f(\Theta)$ 是先验概率密度函数，该函数可以通过专家的经验进行刻画；$f(\Theta\,|\,x)$ 是后验概率密度函数。

设 LGD 的均值记为 μ，下行 LGD 的均值记为 θ，显然 $\mu<\theta$。则 LGD 的 μ 和下行 LGD 的 θ 可以通过极大化联合后验概率密度函数求得

$$f(\mu,\theta\,|\,x)=\frac{f(x\,|\,\mu,\theta)}{f(x)}\times f(\mu,\theta)$$

由于 $f(x)$ 与参数 μ 和 θ 无关，上式可以写成

$$f(\mu,\theta\,|\,x)\propto f(x\,|\,\mu,\theta)\times f(\mu,\theta)$$

首先对先验概率 $f(\theta,\mu)$ 进行处理：

为了获取下行违约概率损失（downturn LGD）θ，主持专家研讨会，充分讨论后征求专家意见，每个资深专家独立给出对违约概率损失最小 a、最可能 c 及最大 b 的估计。本例共收集五名专家数据：

	Expert1	Expert2	Expert3	Expert4	Expert5
Minimum	25%	35%	25%	40%	20%
Most Likely	75%	70%	70%	75%	75%
Maximum	95%	85%	95%	95%	90%

可以认为专家对违约的估计服从概率统计中的三角分布，该分布是

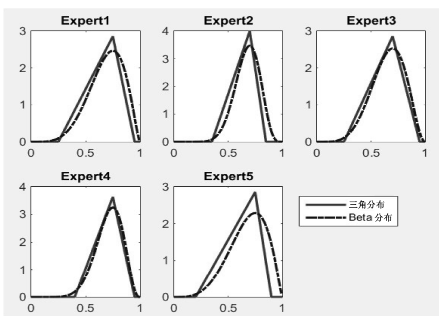
下限为 a、众数为 c、上限为 b 的连续概率分布，其形式如下：

$$f(x\,|\,a,c,b)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c\leqslant x\leqslant a\end{cases}$$

三角分布通常用于已知变量关系但缺少采样数据的情况，常常是根据已知最大值与最小值从而推导合理的常见值，以期建立在最大值与最小值之间事件发生的概率模型。然而在应用中常常因为缺乏理论支撑和应用条件，误差量与实际潜在数据分布之间可能差距很大。

因此，常常采用 Beta 分布近似代替三角分布，即通过下式最小化距离可以估计

$$\min\quad [f(x;a,c,b)-\mathrm{Beta}(x;\mu,\phi)]^2$$
$$\mathrm{s.t}\begin{cases}a=\mathrm{Beta}_{0.05}(\mu,\phi)\\ b=\mathrm{Beta}_{0.95}(\mu,\phi)\\ c=(\mu\phi-1)/(\phi-2)\end{cases}$$



收集这些信息目的是为了拟合一个先验 Beta 分布。特别地，

$$f_i(\theta,\mu)=f_i(\theta)\cdot f_i(\mu\,|\,\theta)$$

不失一般性，假设 Beta 分布的均值 μ 服从均匀分布，即

$$f_i(\mu\,|\,\theta)\propto\frac{1}{\theta}$$

因此，联合先验概率分布可以简写为

$$f_i(\theta,\mu)\propto f_i(\theta)\cdot\frac{1}{\theta}$$

基于专家经验的先验概率密度可以写成

$$f(\theta,\mu)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(\theta,\mu)$$

其次对似然 $f(x\mid\mu,\theta)$ 进行处理：

若令 $\alpha=\mu\phi$ ， $\beta=(1-\mu)\phi$ ，则 $X\sim\mathrm{Beta}(x;\mu,\phi)$ ，此时 $E(X)=\mu$, $M(X)=\dfrac{\mu\phi-1}{\phi-2}$， $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{\mu(1-\mu)}{1+\phi}$ 。

历史数据 $X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是服从独立同分布的 Beta 随机变量，即

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid(\mu,\phi)\sim\mathrm{Beta}(\mu,\phi)$$

$$f(x\mid\mu,\phi)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{Beta}(x_i\mid\mu,\phi)$$

根据历史数据可知， θ 近似取为 Beta 分布的 86%分位数，于是 θ 与 ϕ 可以建立如下关系：

$$\theta=\mathrm{Beta}^{-1}(0.86,\mu\phi,(1-\mu)\phi)$$

通过上述关系式，可以求得参数 θ，它是参数 ϕ 的函数。在这个贝叶斯框架中，所有关于下行 LGD 的 θ 信息均来自似然函数的数据。

后验分布 $f(\mu,\theta\mid x)$

$$f(\mu,\theta\mid x)\propto f(x\mid\mu,\theta)\times f(\mu,\theta)$$

对上述关系式取对数，即

$$\log f(\mu,\theta\mid x)\propto\log f(x\mid\mu,\theta)+\log f(\mu,\theta)$$

$$[\hat{\mu},\hat{\theta}]=\arg\max_{\mu,\theta}\log f(x\mid\mu,\theta)+\log f(\mu,\theta)$$

由最后一个方程，通过极大化后验概率分布 $f(\mu,\theta)$，这里我们采用 matlab 中的函数 fmincon 进行求解。可以同时求出 LGD 的均值 μ 和下行 LGD 的均值 θ 的估计。

参数	α	β	μ	ϕ	θ
估计值	1.2701	1.7915	41.48%	3.0616	71.59%

（4）结果分析与比较。

下表是本案例基于数据集 B 的后验极大似然估计方法、极大似然估计法、核密度估计方法进行比较，可以发现它们之间的结果相差不大，说明本案例的后验极大似然估计方法是一种合理的方法。

参数估计方法	本模型方法	极大似然法	核密度估计法
μ	41.48%	39.73%	44.55%
θ	71.59%	72.02%	73.25%

若将数据 B 中的数据值均变成原来的一半，上述三种方法得到的结果如下表所示。

参数估计方法	本模型方法	极大似然法	核密度估计法
μ	37.02%	18.42%	22.27%
θ	67.33%	36.88%	36.62%

可以发现，本模型中的结果变化不大，而另外两个方法得到的结果几乎变成了原数据集估计的 1/2。这说明本模型中的方法具有很强的稳健性，即能够抗拒因数据采样有偏而带来的较大偏差。

同学们可以做以下练习：①调整专家的估计值，看看对估计 $\mu<\theta$ 有多大影响；②对数据集 B 中的数据进行排序，分成上下两组，分别估计，看会有什么的影响；③如今社会的离婚率持续增长，对社会的稳定带来了非常大的影响，民政部门非常重视，但近年由于房地产政策的影响，社会中出现了假离婚，推高了真实的离婚率，同学们可以自己收集数据，采用类似本案例的方法估计真实的离婚率。

五、教学总结

本案例通过一个金融实际问题的引入，介绍一种充分考虑从业多年的专家经验与定量方法相结合的 Bayes 计量方法——后验极大似然估计法。通过本案例的学习，同学们应该掌握一些处理数据的技巧，掌握贝叶斯公式并将贝叶斯方法应用到解决有先验信息的问题上。

由泊松分布到指数分布

王丹龄
北京科技大学

作 品 标 题：由泊松分布到指数分布
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：指数分布
知识点编码：020302
授 课 对 象：本科一、二年级学生
授 课 时 长：14 分 15 秒
参 考 文 献：[1] 范玉妹，汪飞星，王萍，等. 概率论与数理统计[M]. 2 版. 北京：机械工业出版社，2012.
[2] DeGroot M H, Schervish M J. Probability and Statistics [M]. 4ed. AW, 2012.
[3] 陈希孺. 概率论与数理统计[M]. 合肥：中国科技大学出版社，2009.

一、教学背景

指数分布作为一种常见的连续型分布，常被用于描述独立事件发生的时间间隔、电子产品的“寿命”等，在排队论（随机服务系统）和系统可靠性研究中有着重要的应用。基于指数分布对随机服务系统进行定量分析、对电子元器件进行抽验、对大型复杂系统进行可靠性研究，有

利于更好地提高服务效率，监测电子产品质量，对生产和生活均有重大意义。

二、教学目标

在教学过程中，为了给学生以连贯的知识衔接，从已学过的泊松分布逐步过渡到指数分布。由单位时间内出生的婴儿个数自然地引出婴儿出生的时间间隔，从离散型随机变量切换到连续型随机变量。在此基础上逐步引入有关应用，及指数分布所特有的“无记忆性”；此外，通过数值模拟让学生更为直观地理解指数分布与泊松分布之间的联系与区别。

三、教学内容及重点难点分析

1．主要内容

（1）从泊松分布到指数分布的过渡。
（2）指数分布的概率密度函数、分布函数及其应用。
（3）指数分布的无记忆性。

2．教学重点

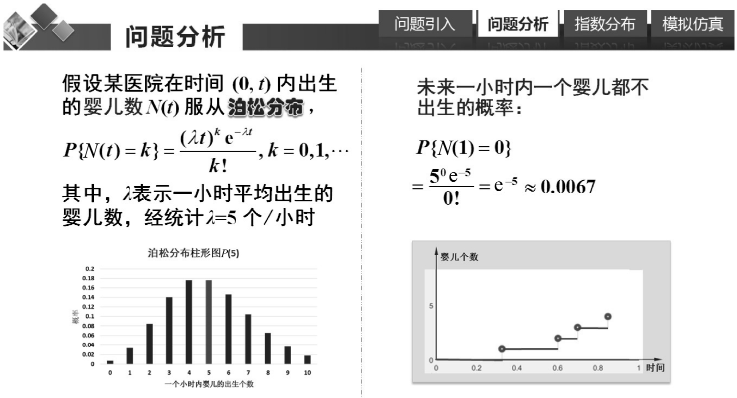
（1）指数分布的概念及其应用。
（2）指数分布与泊松分布的联系与区别。
（3）指数分布的无记忆性。

3．教学难点

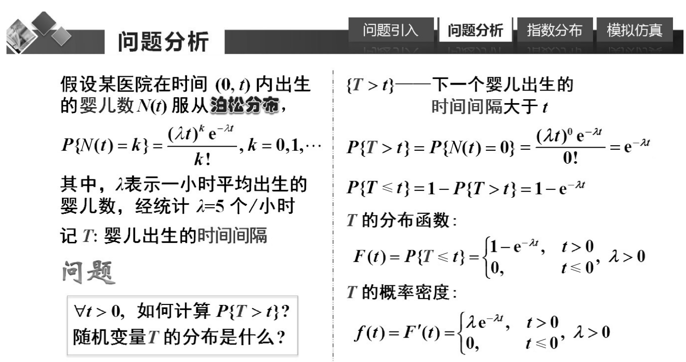
（1）如何应用指数分布分析和解决问题。
（2）如何理解指数分布的无记忆性。
（3）理清指数分布与泊松分布的联系与区别。

四、教学方法和过程

首先在国家全面放开二胎政策积极应对人口老龄化的时代背景下，提出各大医院产科床位紧张从而需要了解婴儿出生规律以便更好服务社会的问题。引导学生利用泊松分布模型分析婴儿出生问题。



泊松分布与本节要讲的指数分布关系密切，通过已学的泊松分布逐渐过渡到指数分布，便于学生理解，并有利于学生形成知识的衔接。借助婴儿出生问题的例子，推导时间间隔的分布与泊松分布的关系，由此引出指数分布。按照认知规律，从已知到未知，让学生顺利地完成知识的衔接，进而形成系统的知识架构。



简单介绍指数分布在四个方面的实际应用。

（1）排队论（随机服务系统）中独立事件出现的时间间隔。

（2）电子产品的“寿命”。

（3）复杂系统的可靠性分析。

（4）战争、灾难、DNA 序列的变异等“稀有事件”发生的规律研究。

指数分布　　问题引入　问题分析　**指数分布**　模拟仿真

定义　若随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，$\theta=\dfrac{1}{\lambda}>0$

则称 X 服从参数为 θ 的**指数分布**。记 $X\sim Ex(\theta)$

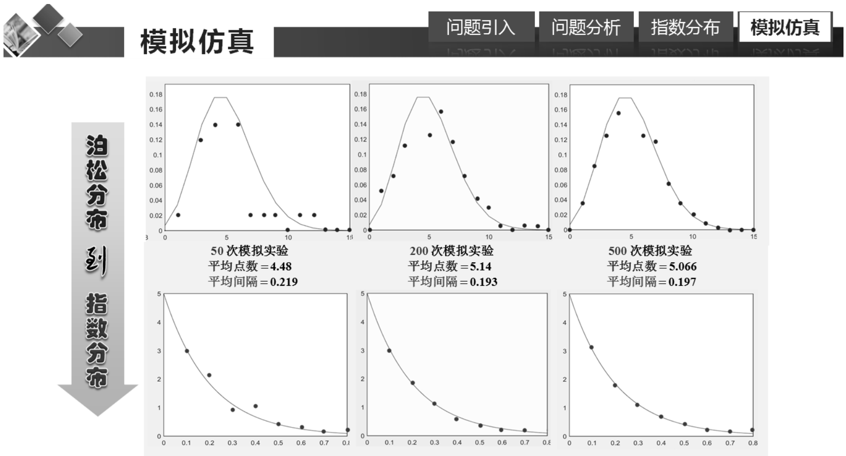
复杂系统故障的时间间隔

战争爆发的时间间隔

电子产品正常使用的寿命

通过练习中的时间间隔分布规律无疑对医院产科的人员安排和床位设置有着重要参考价值。从而进一步延伸，将医院视为某一“服务台”，而婴儿相继出生视为陆续发生的一系列独立事件，即得到一个随机服务系统。引导学生学会如何用指数分布解决简单随机服务系统中的一些问题。基于指数分布和泊松分布等概率统计中的基本理论对这样的随机服务系统进行研究，构成了运筹学的一个分支：排队论。这一研究在日常生活、医疗服务、商业管理、计算机网络、生产-运输-库存等各项资源共享的随机服务系统有着广泛的应用。

指数分布通常被用于描述独立随机事件（顾客陆续随机到达商场、患者陆续随机到达医院、车辆陆续到达路口、放射性物质产生粒子、DNA 序列发生变异）发生的时间间隔。所以最后通过模拟动画的演示，帮助学生进一步理清指数分布与泊松分布的关系，完全掌握指数分布。



五、教学总结

本单元的教学设计符合理工科本科二年级学生的认知规律和实际水平。指数分布是概率论中常见的三种连续型分布之一，根据多年的教学经验，学生学习时总感觉理解困难。因此在课程设计上需要多花心思，由“婴儿出生问题”分析泊松分布与指数分布的关系，使学生对指数分布理解深刻，并达到学以致用的目的。教学过程中采用新颖的教学手段，借助计算机强大的功能，将各种分析及应用力图直观化，使得教学内容更加生动，加深学生对知识点的理解，增加学习兴趣，从而达到由浅入深、引人入胜的教学效果。

定积分在几何学上的应用

张智勇

北方工业大学

作品标题：定积分在几何学上的应用

所属课程：高等数学

相关知识点：旋转体体积的计算

知识点编码：060203

授课对象：理工类本科一年级新生

授课时长：15 分钟

参考文献：[1] 同济大学数学系. 高等数学（上册）[M]. 六版. 京：高等教育出版社，2011.

[2] [俄]菲赫金哥尔茨. 微积分学教程（第 2 卷）[M]. 徐献瑜，冷生明，梁文骐，译. 8 版. 北京：高等教育出版社，2006 年.

一、教学背景

本节课是《高等数学》（上册）中第六章第二节定积分元素法在几何学上的应用部分内容，目前已经学习完定积分的计算方法、定积分元素法的基本思想方法及其在不规则图形面积中的应用，本节课是利用元素法来研究旋转体体积的计算问题。

二、教学目标

1．知识目标

（1）理解旋转体的概念，掌握旋转体体积公式的推导过程，深入理解定积分元素法的基本思想：分割、近似求和、取极限。

（2）熟练运用旋转体体积公式计算旋转体的体积；掌握柱壳法的推导过程，能根据图形和旋转轴的不同，判定柱壳法的适用范围，并能熟练运用。

2．技能目标

（1）能应用定积分元素法分析、计算不规则几何体积的体积问题，解决一些用初等数学方法无法解决的体积问题。

（2）能够判定柱壳法的适用范围，并利用柱壳法分析、计算旋转体体积。

3．思维目标

（1）培养学生的“化归”素养，即培养学生将未知转化为已知、将不规则转化为规则、将整体转化为局部以及从特殊到一般的思维方法。

（2）培养学生的“逻辑”素养，培养学生举一反三、触类旁通的能力。

（3）培养学生的“知识”素养，培养学生应用数学的意识和能力，使学生掌握系统分析和跨学科运用的理论知识。

三、教学内容及重点难点分析

1．教学内容

本节课主要教学内容包括利用元素法研究旋转体的体积：平面图形

绕坐标轴、平行于坐标轴的直线以及斜直线旋转所得旋转体的体积，特别注重柱壳法的使用。

2. 教学重点

教学重点如下：

（1）旋转体体积公式的推导及应用。

通过数形结合和 PPT 演示，并基于定积分元素法的基本思想和步骤，推导平面图形绕坐标轴、平行于坐标轴的直线旋转所得旋转体体积公式，并应用公式计算不同情形下旋转体体积。

（2）用柱壳法推导旋转体体积公式。

理解柱壳法的基本思想和几何意义，掌握该情形下旋转体体积公式的推导，并能熟练利用柱壳法计算旋转体体积。

突出重点如下：

（1）以板书设计为突破口，通过多媒体的辅助来突出重点。

板书是课堂教学的缩影，具有很强的示范和引导作用。教学过程中，将需要掌握的旋转体体积公式的推导过程在黑板上展示，最终将重要公式写在黑板上，让学生从板书的设计上体会到本节课的重点内容。

多媒体课件具有直观和灵活的优势，在旋转体体积公式的推导过程中，利用多媒体课件演示旋转体的形成过程和微元的形成过程，从而实现由具体形象向抽象思维的过渡，有助于学生理解公式的推导过程。同时，引入符号计算软件 Mathematica，模拟旋转体的形成过程，体验到数学与计算机的融合，使学生对计算机的热情能够转移到旋转体的学习上来。

（2）教师语言主导，并辅以形式多样的课堂练习，突出重点。

在旋转体体积公式的推导和应用过程中，教师强调该内容是本节课的重点。同时，有目的的变换平面图形和旋转轴，让学生思考、推导、回答旋转体体积的公式，以问题串的形式来突出重点。

同时，新课设计的练习突出旋转体体积公式的推导及应用，围绕这个知识点让学生多形式、多层次地练习，在练习中理解、巩固，在练习

中转化、运用，使学生意识到旋转体体积公式及应用是本节课的重点内容。在课堂小结时，教师再次强调该知识点的重要性，并以特殊的标记提醒学生。

3. 教学难点

教学难点如下：

（1）不同形状平面图形旋转时，图形的合理分割、微元表达式以及积分限的确定。

在分割平面图形时，几何形状常取为条、带、段、环、扇、片、壳等。如何选取合理的分割方式来简化微元表达式，进而确定积分限是本节教学的难点之一。

（2）旋转体体积公式的推导。

平面图形绕不同旋转轴旋转所得到的体积公式是不同的。体积公式的推导比较抽象，空间想象能力要求较高，故为本节课的另一个教学难点。

突破难点如下：

（1）从学生已有的知识和经验出发，找准知识的生长点，帮助学生建立新旧知识之间的联系。

教学过程中，首先与以前学习过的柱、锥、球等旋转体的定义结合起来教学，使学生明确旋转体的形成有两个要素：一是被旋转的平面图形，二是旋转轴。然后，通过对曲边梯形面积公式的推导作简单的回顾，采用类比的方法，利用定积分元素法的思想方法来完成旋转体体积公式的推导。

（2）抓住关键点，借助多媒体教学手段。

突破本节课教学难点的关键是数形结合，充分采用现代化的多媒体教学手段展示旋转体的形成过程，在计算机中虚拟几何体分割过程的“真实”情景和分割单元的旋转方式，“放大”微观世界，使抽象问题形象化、直观化。

（3）实物展示，强化感知。

生活中有很多旋转体的实物，如矿泉水瓶、粉笔等。同时，将日常生活中不常见的旋转体实物展示给学生，运用形象直观教学方法，并让学生亲自动手设计特定形状和固定容量的饮料瓶，从而培养学生运用所学知识去分析和解决实际问题的能力。

四、教学方法和过程

1．学情分析

（1）知识体系欠缺。

通过初、高中的学习，学生对旋转体有一定的了解，但是缺乏深度和广度，尤其是旋转体体积公式严格的推导过程以及不规则几何体体积的计算等相关问题还是一个未知数。同时，专业课的学习过程或者日常生活过程中经常遇见的一些旋转体的问题，引起了学生对本节课内容的期望。尽管部分学生知道用定积分的元素法可以研究这个问题，但是具体的实施过程还不清楚，需要系统的、严谨的、循序渐进的过程来研究这个问题。

（2）专业课体系需求。

“高等数学 I”教授的主要对象是工科类的学生，他们具有较强的动手能力和实际应用技能。旋转体体积公式的推导具有高度抽象的特点，而抽象的思维对于工科类学生来说有一定的难度，学生对于抽象内容的认可度不高，认为公式的推导是数学专业学生需要掌握的，旋转体体积公式的应用才是工科专业课的需求，因此希望老师少讲理论，多讲例题，同时希望每个理论都能立竿见影地付诸应用。

（3）较强性格特点。

当代大学生在学习过程中对于学习的方法和规律有着独特的见解，有较强的理性，不盲从老师，勇于质疑，也善于质疑。如果在教学过程中，出现了授课内容过于抽象、授课思路与学生的接受路径违拗等问题，

容易使学生丧失学习数学的兴趣，对后续教学乃至专业课教学将会造成严重的负面效果。

2．教学方法

基于学情分析和本节课的教学内容，我采取以下教学方法和策略：

（1）采用以实例驱动为核心的启发式教学法。

针对学生对旋转体有了一定的了解，并且已经掌握了定积分元素法的基本思想，因此通过回忆曲边梯形面积的做法，引导学生应用定积分元素法来推导旋转体体积公式；通过实物展示和多媒体手段，使学生进一步理解旋转体的形成过程以及“分割单元”的旋转过程，以“分割-近似求和-取极限”的思路来完成体积公式的推导过程；注重该部分内容与后续专业课程的衔接，发掘那些能被学生接受且真实存在的案例，融入课堂教学，使学生切实感受到学习“高等数学”的“必要性、有用性”，从而提升学生对这门课程的认同感。

（2）注重学生参与，并辅以应用扩展和实际体验。

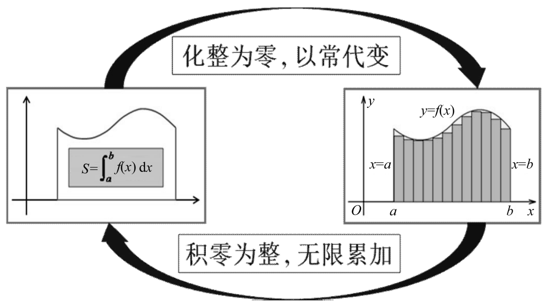
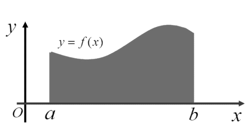
数学的抽象和计算的烦琐使学生对高等数学产生一定的抵触情绪，因此要充分调动学生参与到课堂教学中来，使学生体验到他们在教学过程中的不可忽视的作用。这就要求老师在教学过程中，以问题的形式调动学生的参与热情，并以鼓励的形式激发学习的热情，使学生获得成就感。然后用实际问题设置障碍，让学生体会到本节课内容在处理实际问题时的有效性。最后，以小组的形式，根据本节课学习内容互相设置问题，并回答问题，达到学以致用的目的，增强学习的兴趣。例如，针对本节课的内容，鼓励学生设计不同形状的旋转体，并试着计算旋转体的体积。

（3）尊重学生提出的问题，增强个人的亲和力。

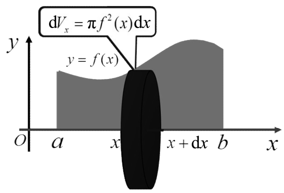
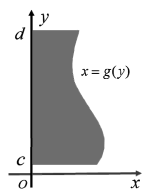
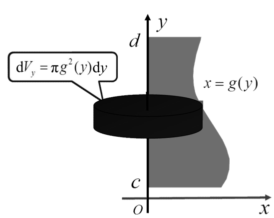
作为初学者，学生可能提出一些简单的问题和一些自己对问题的独到见解，此时作为教师要尊重学生的问题，耐心地讲解和分析学生的问题和见解，鼓励学生对课堂知识点做到“敢想、敢说、敢问、敢做”。同

时，老师应该注重个人亲和力的培养，努力打造一种亲切、随和但又端正的个人形象，通过课后问答环节、建立微信群等形式培优补差!

3．教学过程

时间	教　学　过　程	课堂互动
2 分钟	**1）问题的引入** （1）以夏天同学们经常喝的饮料为切入点，引导学生设计新款的旋转体的饮料瓶使其容积为 600mL，从而引出旋转体体积问题。 （2）复习定积分元素法： 以曲边梯形的面积为例阐述元素法的步骤：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且 $f(x)\geqslant 0$，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边、底为 $[a,b]$ 的曲边梯形的面积，应用元素法的过程如下图所示 	学生看 PPT 上曲边梯形面积的求法（动画演示元素法的步骤），引导学生回忆定积分元素法
2 分钟	**2）旋转体体积的计算** （1）曲边梯形绕 x 轴旋转。 设曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，首先研究曲线 $y=f(x)$ 与 $y=0,x=a,x=b$ 所围成的曲边梯形，如下图所示，绕 x 轴旋转所得旋转体的体积问题。  根据定积分元素法的基本思想，将曲边梯形沿着垂直于 x 轴方向分割成小长方形，将小长方形绕 x 轴旋转后的几何体看成小圆柱体，如下图所示	利用 PPT 展示旋转体的形成过程（动画展示）； 以处理曲边梯形面积的方法为切入点，引导学生采用同样的方法研究旋转体的体积

续表

时间	教 学 过 程	课堂互动
1 分钟	 则小圆柱的体积为底面积 $\pi f^2(x)$ 乘以高 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}V_x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x$，因此该旋转体的体积为 $$\boxed{V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$ （2）曲边梯形绕 y 轴旋转。  设曲线 $x=g(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，考虑曲线 $x=g(y)$ 与直线 $x=0,\ y=c,y=d$ 所围成曲边梯形，如上图所示，绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。 类似于绕 x 轴旋转的处理方法，沿着垂直于 y 轴方向将曲边梯形分割成小长方形，然后将小长方形旋转后的几何体看成小圆柱体，如下图所示。 	类比绕 x 轴旋转的方法，引导学生解决绕 y 轴旋转的情形（请学生思考回答，教师提示补充）； 以熟悉的实物为例说明柱壳法的思想方法； 提示分割方法，（动画演示）引出柱壳法（注重与实物洋葱的结合来讲解柱壳法）

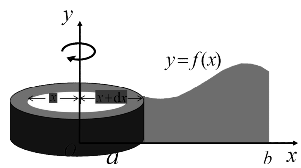
续表

<table>
<tr><th>时间</th><th>教 学 过 程</th><th>课堂互动</th></tr>
<tr><td>4 分钟</td><td>
则体积元为 $\mathrm{d}V_y = \pi g^2(y)\mathrm{d}y$，因此该旋转体的体积为

$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y}$$

以下详细介绍旋转体体积——柱壳法。

问题：设 $f(x)\geqslant 0\,(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=0, x=a$ 和 $x=b$ 所形成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周，求旋转体的体积。



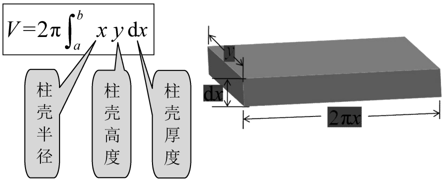
解决思路：如上图所示，首先，取切条 $[x, x+\mathrm{d}x]$，然后将切条绕着 y 轴旋转一周得到一个柱壳，体积为

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \pi[(x+\mathrm{d}x)^2 - x^2]y\\ &= \pi[2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2]y\\ &\approx 2\pi xy\mathrm{d}x = \mathrm{d}V\end{aligned}$$

数学上严格推导出的结果再次验证了例题中的结果，然后以此作为体积元，在区间 $[a,b]$ 上积分可得所求的体积。

对照上图，总结得出柱壳法的公式为

$$\boxed{V = 2\pi\int_a^b x\,y\,\mathrm{d}x}$$

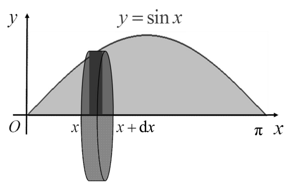
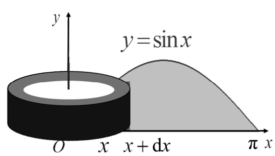


微元表达式有着明显的几何意义：将柱壳沿着纵向切开后即为一个长方体，如上图所示，该长方体的长为 $2\pi x$，宽为 y，高为 $\mathrm{d}x$，所以体积为 $2\pi x\,y\,\mathrm{d}x$
</td><td>
给出柱壳法的几何解释，加深理解，方便记忆；

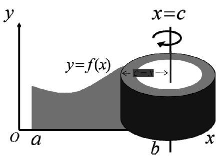
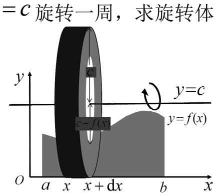
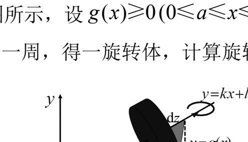
做例题，巩固绕坐标轴旋转的旋转体体积公式；

引导学生考虑旋转轴的变化，引出绕平行于坐标轴的直线旋转情形，计算所得旋转体的体积
</td></tr>
</table>

续表

时间	教 学 过 程	课堂互动
2 分钟	柱壳法的方便之处：虽然图形是绕 y 轴旋转，但是柱壳法却是沿 x 轴方向积分，这样会给我们的计算带来极大的便利。 例：求 $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得到旋转体的体积。 **解题思路：** 利用定积分元素法，绕 x 轴旋转图形如下图所示。  利用上面讲到的绕 x 轴旋转的体积公示可得 $$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$ 绕 y 轴旋转后的旋转体如下图所示。  由柱壳法的体积公式可得 $$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi^2$$ **3）探究归纳** 柱壳法可以处理绕坐标轴旋转的旋转体体积问题，它还可以用来计算不规则图形绕平行于坐标轴的直线旋转所得旋转体的体积。 （1）绕直线 $x=c$ 旋转。 设 $f(x)\geqslant 0\,(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，由 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ 所围成的曲边梯形绕直线 $x=c$ 旋转一周，计算所得旋转体的体积	采用类比的方法来研究，注意所计算体积为两个体积的差； 提示利用定积分元素法，并给出关键步骤，留作思考题； 与学生一起对本节课内容做小结

续表

时间	教　学　过　程	课堂互动
1 分钟	 **解题思路：** 如上图所示，微元为 $\mathrm{d}V_x=2\pi(c-x)y\mathrm{d}x$ 所以　　　　$V_x=2\pi\int_a^b (c-x)y\mathrm{d}x$ （2）绕直线 $y=c$ 旋转。 设 $f(x)\geqslant 0\,(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，由 $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ 所围成的曲边梯形绕直线 $y=c$ 旋转一周，求旋转体的体积。  **解题思路：**如上图所示，所求的体积 V_y 为图形 $y=0,y=c,x=a,x=b$ 绕 $y=c$ 所得圆柱体的体积 $V_{圆柱}$ 与曲边梯形 $y=f(x),y=c,x=a,x=b$ 绕 $y=c$ 旋转所得旋转体 $V_{曲边}$ 的体积的差。 对于 $V_{曲边}$，由柱壳法，体积元为 $\mathrm{d}V_y=2\pi(c-y)x\mathrm{d}y$，所求旋转体的体积为 $V_y=V_{圆柱}-V_{曲边}$ $=\pi c^2(b-a)-2\pi\int_c^d (c-y)x\mathrm{d}y$	
1 分钟	**思考题：**如下图所示，设 $g(x)\geqslant 0\,(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，由阴影部分绕直线 $y=kx+l$ 旋转一周，得一旋转体，计算旋转体的体积。 	

续表

时间	教　学　过　程	课堂互动
1 分钟	**思考题分析：** 曲线 $y = g(x)$ 上的点到直线 $y = kx + l$ 的距离公式为 $$r(x) = \frac{\lvert kx - g(x) + l \rvert}{\sqrt{1+k^2}}$$ 变量之间的关系为 $$\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \cos\alpha$$ **4）当堂小结** 旋转体的体积计算：绕坐标轴、平行坐标轴的直线、斜直线旋转的旋转体体积公式；柱壳法	

五、教学总结

通过本节课的教学工作，使学生能够理解旋转体体积公式的推导过程，并进一步理解定积分元素法的基本思想，且能够应用到其他实际问题中。同时，在教学过程中需要进一步调动学生的积极性，使他们能够切实地参与旋转体体积公式的推导及其在实际问题中的应用，鼓励有条件的同学能够解决课堂上的开放性问题，从而调动学生学习“高等数学”的积极性。

假设检验原理

牟唯嫣

北京建筑大学

作 品 标 题：假设检验原理

所 属 课 程：概率论与数理统计

相关知识点：假设检验原理

知识点编码：050401

授 课 对 象：本科二年级学生

授 课 时 长：10 分 22 秒

参 考 文 献：茆诗松，程依明，濮晓龙. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

一、教学背景

本课程是工科专业的学科基础课，是研究随机现象统计规律性的一门数学课程，其理论及方法与数学其他分支相互交叉、渗透，已经成为许多自然科学学科、社会与经济科学学科、管理学科重要的理论工具。由于其具有很强的应用性，特别是随着统计应用软件的普及和完善，使其应用面几乎涵盖了自然科学和社会科学的所有领域。前面课程已经学习了参数估计，统计推断的另一主要内容就是假设检验。

二、教学目标

（1）了解假设检验基本思想。

（2）理解检验的基本概念。

（3）认识假设检验问题。

（4）熟悉假设检验的基本步骤。

三、教学内容及重点难点分析

教学内容：假设检验的基本思想，假设检验问题，假设检验的基本步骤。

教学重点与难点： 假设检验的思想和检验方法。

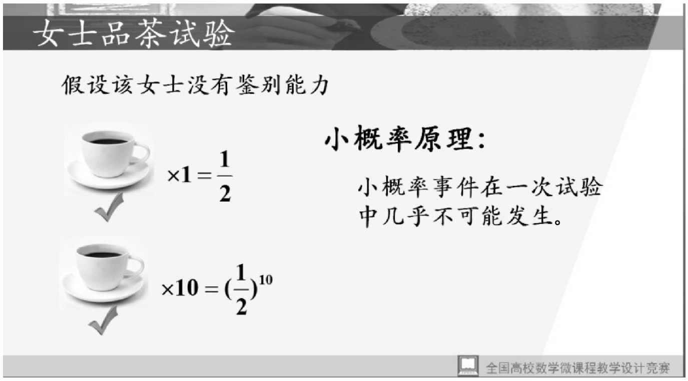
四、教学方法和过程

教学方法：借助多媒体技术，教师结合实际问题讲授。

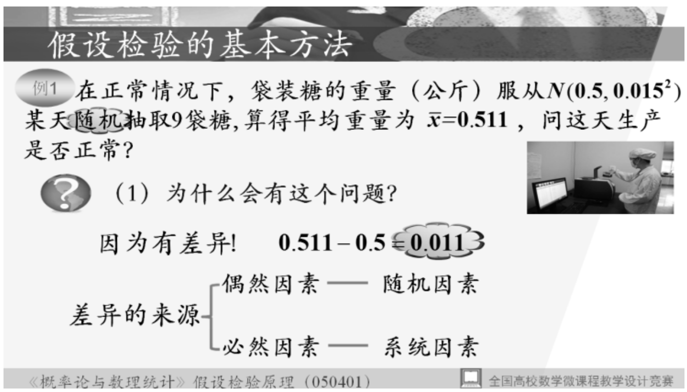
教学过程如下。

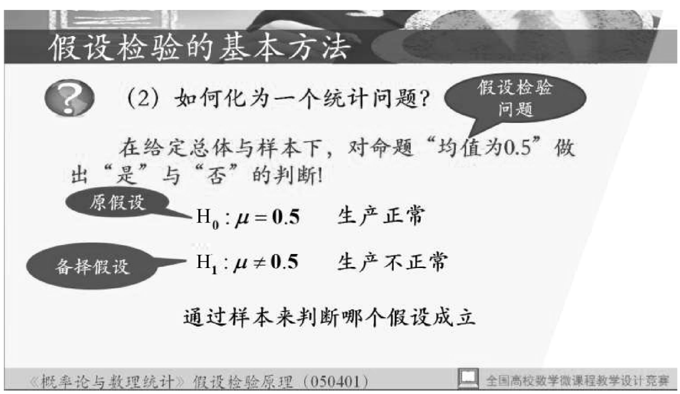
首先，通过著名的女士品茶试验引入课题，拉近所学知识点与实际生活的距离，加强学生的感性认识，提高学生兴趣。

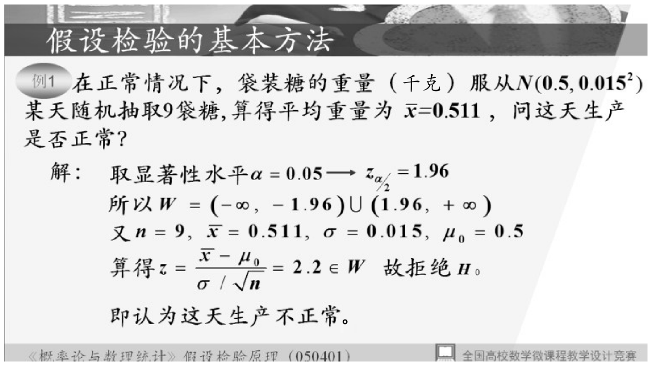
从引例导出之前学过的小概率原理，让同学们了解小概率原理在对命题做判断时发挥的作用。



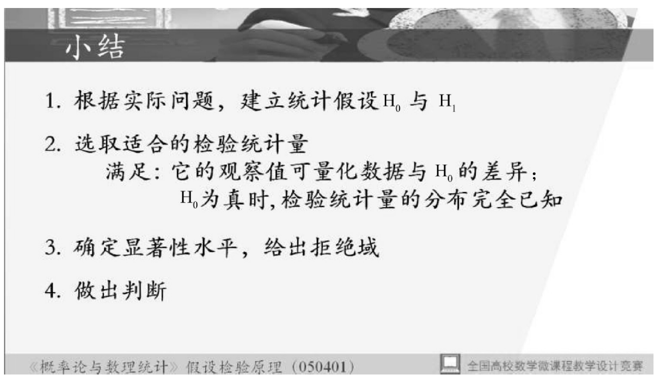
然后，通过例子来学习假设检验的基本思想，原假设、备择假设等基本概念和假设检验的基本方法。



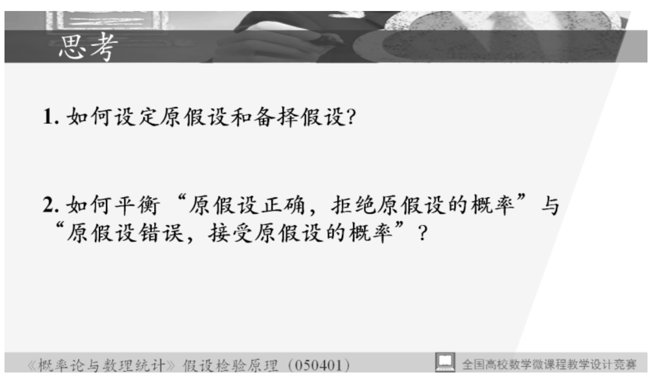




通过这个例子向同学们说明如何用假设检验方法解决实际问题。基于此例，总结假设检验的基本步骤。



最后给同学们留两道思考题供大家课后思考。



五、教学总结

本节课通过两个实例引出假设检验的概念，给出假设检验的基本方法和基本步骤。本节内容与实际联系较紧密，能使学生直观地认识假设检验在实际应用中的作用，有利于激发学生的学习兴趣，提高学生学习的主动性。

假设检验原理

谢玉粉

北京信息科技大学

作 品 标 题：假设检验原理

所 属 课 程：概率论与数理统计

相关知识点：假设检验原理

知识点编码：050401

授 课 对 象：本科二年级学生

授 课 时 长：14 分钟

参 考 文 献：[1] 盛骤，谢世千，潘承毅. 概率论与数理统计[M].北京：高等教育出版社，2008.

[2] 茆诗松，程依明，濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[3] 何书元. 数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2012.

一、教学背景

假设检验是一种应用非常广泛的统计推断方法，是概率论与数理统计教学的一个重点，也是一个教学难点，掌握好这种方法对于学生将来的实际工作是非常有益的。假设检验问题背后蕴藏着丰富的统计思想，如何引导学生主动思考并理解统计思想？如何培养学生独立思考并利用

统计思想解决实际问题？如何将教学方法和学习方法有机结合，在具体情境中激发学生学习的主动性和积极性？这些问题，都是非常值得探讨的。也就是说，在教学中不仅要让学生熟悉相关的基本概念，更要培养学生分析问题、解决问题的能力。本课程将从一个经典的故事入手，从故事中的争议，引出费希尔的解决方案，从而自然而然地引出本节课的教学内容——假设检验。

二、教学目标

（1）了解假设检验中的相关概念。

（2）理解小概率事件的实际不可能性原理：概率很小的事件在一次试验中是不可能发生的。

（3）理解假设检验的基本思想。

（4）掌握假设检验的步骤。

三、教学内容及重点难点分析

教学内容：女士品茶—假设检验的思想—实例分析—假设检验步骤—思考。

教学重点：假设检验步骤。

教学难点：假设检验思想。

四、教学方法和过程

1. 教学方法

本次课程以讲述为主，采用探究式和启发式教学，通过层层递进的方式展开教学内容。

2．教学过程

首先，通过“女士品茶”故事的介绍，引入需要思考的问题：该女士没有鉴别能力？还是该女士有鉴别能力？通过费希尔的试验，引出解决问题的方法。从而很自然地引出假设检验的思想，并使学生了解到小概率事件的实际不可能性原理，在假设检验中是如何应用的。在此过程中，通过深入浅出的试验设计，吸引学生的注意力并进行积极思考，提升学习的主动性，并加深学生对问题的理解和掌握。

其次，通过实例分析，引导学生利用费希尔的假设检验思想解决实际问题，引出假设检验中的基本概念：原假设和备择假设、显著性水平、p 值检验、拒绝域和统计量检验等，并整理出假设检验的步骤。在此过程中，所有的相关概念都不是突兀给出的，而是在实际问题的分析过程中，根据需求而自然引入的，使得学生不仅理解相关概念的含义，而且学会分析和解决实际问题的方法，最终深刻理解假设检验的原理，掌握假设检验的步骤。

最后，通过两个思考题：如何选取原假设 H_0？如何看待假设检验的两种结论，拒绝原假设 H_0 和接受原假设 H_0？使得学生对假设检验的后续问题有进一步的思考。

五、教学总结

本课程从“女士品茶”的故事入手，通过统计中的经典故事，介绍重要的统计推断方法：假设检验。通过实例分析，引出假设检验的相关概念和解决问题的方式方法。教学过程深入浅出，学生紧跟教师的思路，积极主动思考，保证了教学质量。通过本次课程的学习，同学们比较好地理解了假设检验的基本思想，能够掌握假设检验的基本方法，提高了分析问题和解决问题的能力。

极坐标系下面积的计算

夏　霞

中央民族大学

作 品 标 题：极坐标系下面积的计算

所 属 课 程：高等数学

相关知识点：极坐标下面积的计算

知识点编码：060202

授 课 对 象：非数学专业理工科本科一年级学生

授 课 时 长：14 分钟

参 考 文 献：同济大学数学系．高等数学[M]．7 版．北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

1．学生的知识结构

本课程的教学对象已经系统地完成了《高等数学》前五章的学习，特别是“定积分”一章中学习了定积分的定义及计算曲边梯形面积的几何意义，对从直角梯形到曲边梯形面积的研究过程有基本的认识。学生在第六章的前面部分学习了使用元素法讨论直角坐标系下平面图形面积的过程，掌握了用小矩形面积近似代替小曲边梯形面积的面积元素讨论方法，为本节课用元素法结合扇形的面积分析推导曲边扇形的面积计算

公式奠定了良好的基础。同时，本节课面积公式讨论的背景即极坐标系学生早在高中阶段就进行过细致的学习，对直角坐标系和极坐标系的转换公式也有所了解，能很好地理解本节课在极坐标系下的一系列讨论。

2．学生的心理状态

通常学生对函数及图形的讨论都是在直角坐标系下进行，对极坐标系下曲线的方程及图形的学习不够深入，虽然很多极坐标方程表示的曲线图形瑰丽无比令人赞叹，但学生总认为这些曲线只存在于书本学习，距离自己的生活很远，甚至是遥不可及的，对本节的学习会产生天然的畏难情绪。此外，用定积分计算平面图形的面积方法灵活多样，根据图形的特征及方程的具体表达式选择不同坐标系下面积计算公式，对几何图形观察能力较弱的学生来说很容易混淆，容易陷入对公式的机械记忆中。

鉴于以上学生在极坐标系下学习面积计算公式的心理状态，授课教师可采取以下措施：引导学生观察使用直角坐标下面积计算公式的图形和使用极坐标系下面积计算公式的图形在形状、方程及求解过程中的难易程度；采用动画演示例题中所涉曲线的形成过程；搜集大量的课程素材，让学生感受这些曲线在生活中的实际应用。活跃课堂气氛，激发学生的学习兴趣，也能培养学生平时仔细观察生活并提出问题、解决问题的习惯。

二、教学目标

掌握极坐标系下曲边扇形的面积计算公式，会用公式计算极坐标方程表示的曲线围成图形的面积，计算中能根据曲线的方程和图形分析积分变量的变化区间。

三、教学内容及重点难点分析

教学内容：极坐标系下推导曲边扇形的面积计算公式，利用公式求心形线所围图形的面积。

重点：在极坐标系下引导学生利用元素法，结合扇形的面积计算公式推导曲边扇形的面积元素，从而建立极坐标系下面积的计算公式。

难点：

（1）用定积分计算平面图形的面积，元素法使用的面积元素在直角坐标系下用小矩形面积代替，在极坐标系下用小扇形面积代替，如何区分和使用两种坐标系下的面积计算公式是相对困难的。

（2）在具体解题的应用中，极坐标系下面积计算公式中积分变量的变化区间需要通过曲线的方程和图形分析得到，如何引导学生对方程和图形进行观察分析是本节课的另一难点。

四、教学方法和过程

1．教学方法

本节课程主要采用讲授法，结合比照教学法并注重不同学科间的交叉互动，通过讲授和分析，并结合具体的实例，使学生掌握极坐标系下面积的计算公式。

（1）比照教学法。在推导极坐标系面积计算公式时先回顾直角坐标系下曲边梯形的面积计算公式，引导学生发现两种坐标下面积计算的推导过程的异同点，认识到不同坐标系下面积元素的不同从而导致公式的形式不同，对所求面积的图形形状也有一定的要求。

（2）注重不同学科间的交叉互动。在心形线围成图形面积的计算例题之后展示心形线在生活中的应用实例：中间部分是心形线的曼德勃罗集合在分形学呈现出的部分和整体形似性；简单说明心形指向话筒的心形灵敏度模式在录音或现场演出中对环境噪声的抑制作用，激发学生对分形学、物理学等相关课程的兴趣。

2．教学过程

1）引入

扇形是由一条圆弧和经过这条圆弧两端的两条半径所围成的图形，如果将扇形的圆弧改为一条曲线，满足从顶点出发的每一条射线和曲线至多交于一点，此时称这样图形为曲边扇形。提出问题：如何计算曲边扇形的面积？

回顾直角坐标系下用定积分求曲边梯形面积的过程，在直角坐标系下若曲边梯形有两条边平行于y轴，设曲边的方程是$y=f(x)$，取x为积分变量,则x的变化区间是$[a,b]$，任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条的面积近似于高为$f(x)$、底为$\mathrm{d}x$的窄矩形的面积，从而得到面积元素$dA=f(x)\mathrm{d}x$，因此曲边梯形的面积是函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的定积分。类似于曲边梯形的面积计算，下面我们在极坐标系下用定积分推导曲边扇形的面积公式。

2）极坐标系下曲边梯形的面积计算公式推导

设曲边扇形两边的射线的方程为$\theta=\alpha,\ \theta=\beta$，曲边上的点到极点的距离即极径是极角$\theta$的函数$\rho=\rho(\theta)$，其中$\rho(\theta)$是$[\alpha,\ \beta]$上的连续函数。

取极角θ为积分变量，它的变化范围是$[\alpha,\ \beta]$，相应于任一小角度区间$[\theta,\ \theta+\mathrm{d}\theta]$的窄曲边扇形的面积可以用半径为$\rho=\rho(\theta)$、中心角为$\mathrm{d}\theta$的扇形的面积来近似代替，从而得到曲边扇形的面积元素$\mathrm{d}A=\dfrac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$，从而曲边扇形的面积是函数$A=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$。公式中极角$\theta$是积分变量，$\rho(\theta)$是曲线的极坐标方程，$\alpha,\ \beta$是曲边的端点与极点连线的极角，也就是积分变量$\theta$的变化区间。在具体的应用中需要根据图形或曲线的极坐标方程来确定。

数学中有很多类型的曲线方程用极坐标方程表达比用直角坐标方程表达形式更为简单，研究这些曲线所围成图形的面积就可以选择使用这个面积公式进行计算。

3）应用举例

例如心形线，是一个圆上的固定一点在该圆绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹，因其形状像心脏而得名。（它的英文名称“Cardioid”意为“像心脏的”，是 De Castillon 在 1741 年的《Philosophical Transactions of the Royal Society》发表的。）以定点在固定圆上的切点为起点，并以该起点为极点建立极坐标，则心形线的极坐标方程为 $\rho = a(1-\cos\theta)$ ，其中 $a>0$ 是圆的直径。将极坐标系与直角坐标系间的关系式

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

代入心形线的极坐标方程，再化简得心形线直角坐标方程为 $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2+y^2}$ 。

提出问题：如果计算心形线所围图形的面积，选取哪种坐标系下的面积计算公式更为简便呢？

分析：从方程的表达式来看心形线的极坐标方程形式更为简单。从图形来看，若选用直角坐标系下的定积分计算，以 x 为积分变量为例，在 $x>0$ 的这部分以 $\mathrm{d}x$ 为底的窄矩形的高，需用上端点的函数值减去下端点的函数值，而这两部分的函数表达式是比较复杂的，从而想求得面积元素就相对困难。如果选取极坐标，面积元素只和中心角 $\mathrm{d}\theta$ 和极径 $\rho(\theta)$ 有关，因此心形线所围图形的面积利用极坐标系下面积的计算公式会相对简便些。

例：计算心形线 $\rho = a(1-\cos\theta)(a>0)$ 所围成的图形的面积。

解：由图形看出心形线所围成的图形关于极轴对称，因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积的 2 倍，取 θ 为积分变量，则极轴以上部分 θ 的变化区间为 $[0,\pi]$，于是利用极坐标系下面积的计算公式，极轴以上部分图形面积为

$$\frac{A}{2}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi a^2$$

因而心形线所围图形的面积为 $A=3\pi a^2/2$。

在这个例题中我们看到极坐标方程表示的曲线围成图形的面积可用公式进行计算，计算中充分利用对称性可简化计算。

心形线在生活中有广泛的应用，我们能在很多浪漫的心形小饰品的外形上看到，除此之外在我们看不到的地方心形线也真实存在着。以称为“分形学之父”的数学家名字命名的曼德勃罗（Mandelbrot）集合正中间的图形便是一个心形线，这是分形中的一个著名的例子,是利用电脑在简单数学公式的基础上绘制得出的，当把图形的局部放大后，会呈现出一种与整体的部分之间的惊人形似性。在 Mandelbrot 集合发现之初被认为是“人类有史以来做出的最奇异、最瑰丽的几何图形”。

除了数学的构造外，话筒、手机以及发动机上也能感受到心形线的应用。最常见的一种单向麦克风是心形指向话筒，如此命名是因为这种话筒的灵敏度模式是心形的。话筒在心尖头的位置处灵敏度最好，还原度最高，能最大程度地拾取正前方的声音，对背面和侧面的声音抑制得比较好，在多重录音环境和现场演出中，因其屏蔽功能能够剔除大量环境噪声而被经常使用。

提供维基百科中关于心形线的方程、性质及相关应用的网址，让学有余力的同学在课后可以更为深入地学习：https://en.wikipedia.org/wiki/Cardioid。

4）小结

总结极坐标系下曲边扇形的面积公式 $A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$，公式中 $\rho(\theta)$ 是曲边的极坐标方程，积分变量 θ 的变化范围要根据曲线的方程和图形具体分析，计算中利用图形的对称性能简化计算过程。

五、教学总结

本节课主要在极坐标系下推导曲边扇形面积的计算公式，并应用于求心形线所围图形的面积。

本节课有以下创新点：

（1）注重新旧知识的类比。将定积分几何意义中梯形和曲边梯形的联系与本节中扇形和曲边扇形的联系作对比，让学生感知曲边扇形图形的特征，进而理解在极坐标系下推导公式的原因。此外将直角坐标系下小矩形的面积元素讨论方法和极坐标系下小曲边扇形的面积元素的讨论作对比，让学生深刻理解极坐标下面积的计算公式和直角坐标系下面积的计算公式在形式上的不同点。

（2）注重数学与相关学科的联系与渗透。在心形线围成图形面积的计算例题讲解之后，适度给出心形线在生活中的应用，如分形学中著名的曼德勃罗集合中间部分就是心形线，心形指向话筒的灵敏度模式就是心形的，在录音或现场演出中对环境噪声有很好的抑制作用，能让学生体会高等数学在其他学科中的广泛应用。

导数的定义和几何意义

陈星玎

北京工商大学

作 品 标 题：导数的定义和几何意义

所 属 课 程：高等数学

相关知识点：导数的定义，导数的几何意义

知识点编码：020102，020105

授 课 对 象：本科一年级学生

授 课 时 长：15 分钟

参 考 文 献：同济大学数学系.高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

如果说人类对于数学第一个最重要的工作是给出了数和数的运算法则，那么第二个最重要的工作就是发明了微积分。微积分包括微分学和积分学，导数是微分学的核心概念之一。导数不仅是数学知识，也体现一种数学思想，它蕴含了函数思想和极限的思想方法。通过本次课的学习，我们不仅要得到导数的定义，而且要形象地理解导数的几何意义，并且利用导数解决实际问题。

二、教学目标

（1）理解导数的定义。
（2）掌握用导数的定义求导数。
（3）理解导数的几何意义。

三、教学内容分析

1．教学内容

（1）导数的定义。
（2）导数的几何意义。

2．教学重点

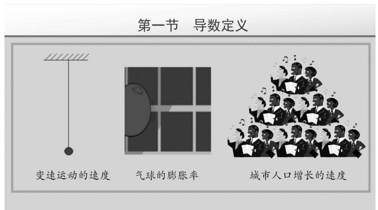
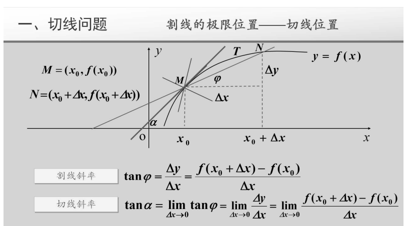
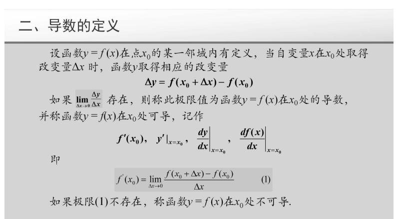
导数的几何意义。

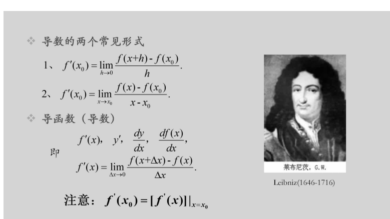
3．教学难点

（1）通过极限的思想给出导数的定义。
（2）导数几何意义的应用，理解“以直代曲”的数学思想。

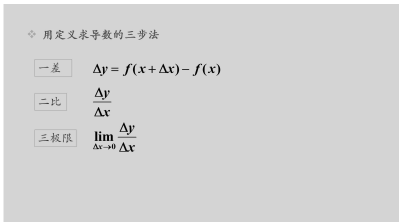
四、教学方法和过程

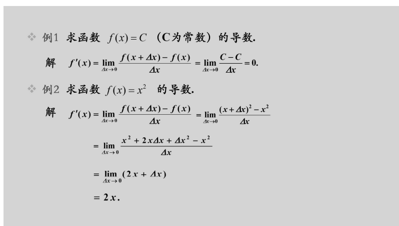
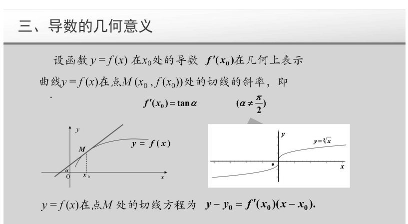
（1）以概念讲授为主，适当穿插提问和思考。
（2）借助多媒体动画演示进行启发性教学。
（3）在实际应用中感受数学的魅力。

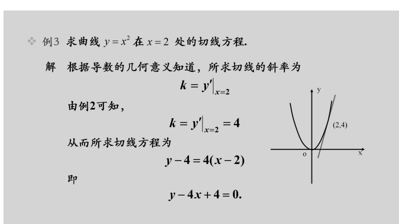
<table>
<tr><th>教学步骤</th><th>教学内容</th><th>设计意图</th><th>时间分配</th></tr>
<tr><td>1. 课程导入</td><td>从实际应用引出函数变化快慢问题

</td><td>明确本节课学习内容</td><td>30 秒</td></tr>
<tr><td>2. 具体问题引入新课</td><td>计算曲线上一点切线的斜率问题

</td><td>通过问题引入新课，PPT 动态呈现，加强学生的感性认识</td><td>1 分 30 秒</td></tr>
<tr><td>3. 分析问题得到定义</td><td>将曲线上一点的切线斜率问题抽象出来，得到导数的定义



</td><td>通过问题驱动，水到渠成给出导数的定义</td><td>3 分钟</td></tr>
</table>

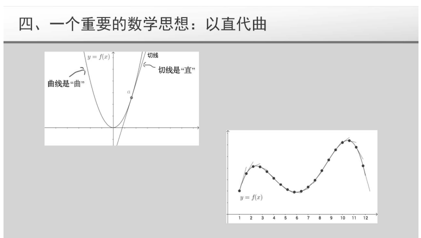
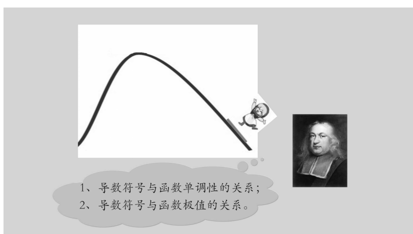
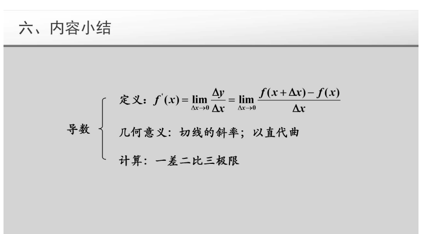
续表

<table>
<tr><th>教学步骤</th><th>教学内容</th><th>设计意图</th><th>时间分配</th></tr>
<tr><td>4. 利用定义解决问题</td><td>根据导数的定义，求函数的导数



</td><td>归纳利用定义求导数的三步法：一差二比三极限</td><td>4 分钟</td></tr>
<tr><td>5. 分析问题几何意义</td><td>由前面的分析很自然地得到导数的几何意义



</td><td>引导学生数形结合，得到导数的几何意义</td><td>2 分钟</td></tr>
</table>

续表

教学步骤	教学内容	设计意图	时间分配
6. 进一步分析问题体会数学思想	由导数的几何意义，引出一个非常重要的数学思想——“以直代曲” 	培养学生的观察能力	1 分钟
7. 现实生活内容引申	通过现实生活中的冲浪，引导学生思考导数的应用 	培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，让学生感受到数学应用的魅力	2 分钟
8. 课堂总结	最后，对本次课的内容进行总结 	梳理过程，让学生对本堂课的重难点有清新的认识	1 分钟

五、教学总结

本节课主要讲授导数的定义和导数的几何意义。通过多媒体课件的演示，使学生从一个具体问题出发自然得到导数的定义和导数的几何意义，并向学生展示一个重要的数学思想——“以直代曲”。通过实际生活中的冲浪，让学生切身感受到数学应用的魅力，从而激发学生的学习兴趣，启发学生应用数学知识去解决实际问题。

给药方案的确定

刘　芳
北京中医药大学

作品标题：给药方案的确定
所属课程：大学数学应用案例
相关知识点：极限、级数
授课对象：本科一年级学生
授课时长：11 分 37 秒
参考文献：[1] 奚念珠. 药物动力学[M]. 上海：上海医科大学出版社，1990.
[2] 姜启源. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2011.

一、教学背景

学生在高中已经了解极限的一些计算，虽然没有学习级数，但是可以计算等比数列的求和公式。本应用案例可以安排在开始学习大学数学之前，用函数、变量、数列求和、极限的角度激发学生学习大学数学的兴趣；也可以安排在极限计算、级数之后，用案例拓展学生们对知识点的理解。

二、教学目标

（1）培养学生利用数学归纳法、极限、级数等知识，解决实际问题的能力。

（2）引起学生对数学的兴趣，用函数、变量的角度思考实际问题。

三、教学内容及重点难点分析

（1）教学重点：以时间为自变量，血药浓度为因变量，利用数学归纳法，在第一次注射、第二次注射、第三注射以及第 n 次注射前后，建立血药浓度的关系函数；为解决问题，对模型中的参数求解。

（2）教学难点：如何引导学生建立血药浓度的关系函数。

四、教学方法和过程

教学内容	设计意图
感冒清热颗粒的用法用量是如何确定的呢？	用生活中的例子引导学生们思考，用什么数学知识和方法解决问题
给某病人静脉注射某药的案例，给出维持剂量，注射间隔时间，两次注射后的血药浓度，以及有效血药浓度范围等具体数据。问此给药方案是否达到治疗要求	再用一个带有数据的静脉注射的案例，具体给出已知的条件，提出给药方案的疑问，引起学生们分析已知条件和关键变量
先分析第一次注射后，关键变量，血药浓度的变化规律，$c_1(t)=\dfrac{D_0}{V}\mathrm{e}^{-kt}$。注意到 $t=0$ 时刻，血药浓度的值。提出数学问题，第 n 次注射后，血药浓度的函数关系	把给药方案的问题，转化成数学中求函数表达的问题。 利用药物动力学理论，给出第一次注射后，血药浓度与时间的变化函数。 摆出第 n 次注射后的血药浓度问题
再分析第二次注射前，血药浓度的变化规律 $c_1(\tau)=\dfrac{D_0}{V}\mathrm{e}^{-k\tau}$,。注重注射前与注射后瞬间的对比，血药浓度变化 $\dfrac{D_0}{V}$	用第一次注射后的分析思路，对第二次注射后的血药浓度用函数表示
接下来按同样的算法，分析第三次注射后，血药浓度的函数表达式	带领学生建立注射三次后的血药浓度，注意与注射一次、注射二次时的联系与区别

续表

教学内容	设计意图
利用数学归纳法，总结第 n 次注射后，血药浓度的函数关系。 $c_n(t)=\frac{D_0}{V}(1+e^{-k\tau}+e^{-2k\tau}+\cdots+e^{-(n-1)k\tau})e^{-kt}$	利用一次注射、二次注射、三次注射后的血药浓度规律，推断 n 次注射后，血药浓度的函数关系。这个式子是解决问题的关键
取极限得到稳态后的血药浓度 $c_\infty(t)=\frac{D_0}{V}\frac{e^{-kt}}{1-e^{-k\tau}}$ 称为坪浓度	稳态后的血药浓度是研究的重点
坪浓度关于时间取最小，得“坪浓度最小”表达式 $(c_\infty)_{\min}=\frac{D_0 e^{-k\tau}}{V(1-e^{-k\tau})}$ 坪浓度最小在药物最小有效情形与案例中的情形做比较 $D_{0(\text{调整})}=\frac{(C_\infty)_{\min(\text{有效})}}{(C_\infty)_{\min(\text{案例})}}\times D_{0(\text{案例})}$	“坪浓度最小”表达式与剂量的数量关系的研究比较，探寻剂量随“坪浓度最小”的变化规律。 要最终解决问题，求出调整剂量，只需计算 $(C_\infty)_{\min(\text{案例})}$
$(c_\infty)_{\min}=\frac{D_0}{V}\frac{e^{-k\tau}}{(1-e^{-k\tau})}$	针对案例中的数据，利用整体思想求解参数

五、致谢

关于本内容的设计，参考了很多资源，例如国内外出版的《数学建模》和《药理学》教材，以及各种关于给药方案的相关研究论文、百度文库中的资源等，在此向作者表示感谢！

滑块游戏的可解性

宋诗畅

北京交通大学

作 品 标 题：滑块游戏的可解性

所 属 课 程：线性代数

相关知识点：排列与逆序数

知识点编码：0101

授 课 对 象：本科一年级学生

授 课 时 长：16 分钟

一、教学背景

本次课是线性代数的案例。我们介绍了滑块游戏，特别是 8 数字推盘游戏和 15 数字推盘游戏，提出了数字推盘游戏可解性的概念。之后，用线性代数中排列与逆序数的概念完美解决了滑块游戏的可解性问题。逆序数这个概念属于线性代数中比较抽象的概念，这个概念在行列式中有应用，学生对于这个抽象的概念的理解不是很深刻。通过本次案例，可以加深学生对逆序数这个概念的理解，看到逆序数的有趣的应用，从而提高学习线性代数的兴趣。

二、教学目标

（1）了解滑块游戏的解法。
（2）了解滑块游戏的可解性问题。
（3）了解可解性问题和排列逆序数奇偶性之间的关系。
（4）可以判定哪些滑块游戏是不可解的。

三、教学内容及重点难点分析

教学内容：介绍几种滑块游戏，特别是 8 数字推盘和 15 数字推盘游戏。提出可解性的概念。用线性代数中排列与逆序数的概念解决滑块游戏的可解性。

重点：了解滑块游戏的可解性问题。

难点：可解性问题和逆序数的奇偶性之间的关系。

四、教学方法和过程

1. 介绍滑块游戏

（1）引入滑块游戏。
（2）介绍 8 数字推盘游戏。
（3）具体演示 8 数字推盘游戏的解法。
（4）总结 8 数字推盘游戏的解法过程。
（5）提出 8 数字推盘游戏的不可解问题。
（6）引入 15 数字推盘游戏及其不可解问题。

2. 滑块游戏生成的排列

（1）介绍滑块游戏生成的排列。
（2）提出排列的逆序数的概念。

（3）验证逆序数的奇偶性是 8 数字推盘游戏的不变量。

（4）解决 8 数字推盘游戏的可解性。

（5）指出逆序数的奇偶性不是 15 数字推盘游戏的不变量。

（6）给出一般的奇数阶推盘游戏的可解性判别准则。

（7）介绍 15 数字推盘游戏的可解性判别准则。

北京的二十环问题

李　娅
北京航空航天大学

作 品 标 题：北京的二十环问题
所 属 课 程：高等数学（大学课程应用案例）
相关知识点：多元函数最大值和最小值的求法举例
知识点编码：091304
授 课 对 象：理工科本科一年级学生
授 课 时 长：13 分钟
参 考 文 献：[1] 吴纪桃，魏光美，李翠萍，等. 高等数学 [M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2011.
[2] 北京的二十环究竟在哪里[DB/OL]. https://tieba.baidu.com/p/4152489473，2015 年 11 月 10 日.

一、教学背景

在生产实践与科学实验中，常常需要根据实际测量得到的一系列数据找出近似函数关系的表达式。通常这样的函数关系称为经验公式。最小二乘法是一种常用的求解最佳经验公式的方法，其实质是求总偏差函数的最小值。

二、教学目标

1．知识层面

掌握多元函数求极值和最值的方法。

2．能力层面

培养学生的数学建模思想，培养利用数学方法分析和解决实际问题的能力。

3．认知层面

从生活中的实际问题出发，将其抽象为数学问题，利用数学的方法解决问题，从而使学生能够切身体会到数学在实际中的广泛应用性。

三、教学内容和重点难点分析

内容：最小二乘法求经验公式的数学思想和一般步骤；利用最小二乘法解决实际问题：北京的二十环的位置。

重点：多元函数求最值方法的实际应用。

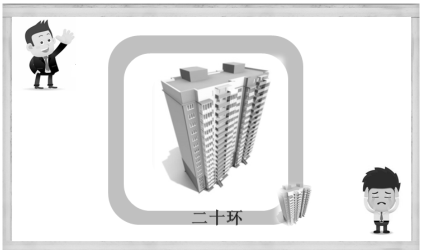
难点：将实际问题转化为数学问题，应用数学建模的思想分析研究问题；多元函数求最值方法在实际问题中的应用。

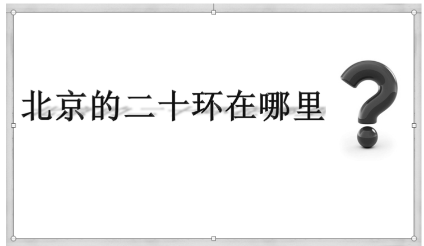
四、教学方法和过程

教学方法以教师讲授为主，结合电子教案。

1．问题的引入（1 分钟）

从网络流行语出发引入所研究的实际问题，调动学生的兴趣。

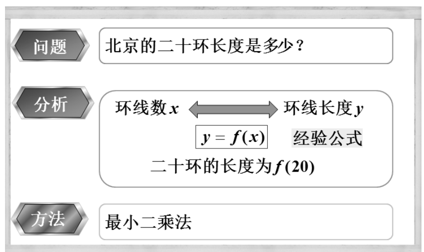


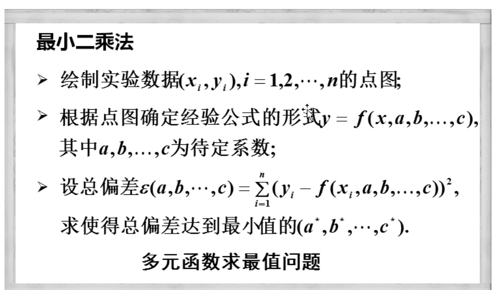


2．对实际问题进行数学建模，引入解决问题的数学工具(3 分钟)

将环线长度问题转化为数学问题，引入解决此类数学问题的常用方法：最小二乘法。介绍最小二乘法的一般步骤，特别指出其实质是多元函数求最值，从而将实际问题转化为高等数学中的多元函数求最值问题。

环数	长度（km）
2	32.7
3	48.3
4	65.3
5	98.6
6	187.6

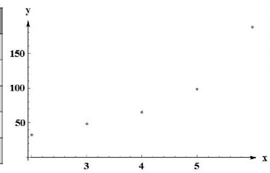




3．解决问题：北京的二十环长度（5 分钟）

应用最小二乘法求得经验公式，从而求出北京的二十环的近似长度。强调多元函数求最值方法在实际问题中的恰当应用。充分利用点图、函数图像等来辅助解决问题。

i	x_i	y_i
1	2	32.7
2	3	48.3
3	4	65.3
4	5	98.6
5	6	187.6



设经验公式为二次多项式 $y=ax^2+bx+c$,

总偏差 $\varepsilon(a,b,c)=\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i^2-bx_i-c)^2$,

$$\text{求驻点:}\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i^2-bx_i-c)x_i^2=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i^2-bx_i-c)x_i=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial c}=-2\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i^2-bx_i-c)=0\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}(\sum_{i=1}^{5}x_i^4)a+(\sum_{i=1}^{5}x_i^3)b+(\sum_{i=1}^{5}x_i^2)c=\sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i\\ (\sum_{i=1}^{5}x_i^3)a+(\sum_{i=1}^{5}x_i^2)b+(\sum_{i=1}^{5}x_i)c=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i\\ (\sum_{i=1}^{5}x_i^2)a+(\sum_{i=1}^{5}x_i)b+5c=\sum_{i=1}^{5}y_i\end{cases}$$

$$\text{解得唯一驻点}\begin{cases}a^*=11.65\\ b^*=-57.20\\ c^*=105.58\end{cases}$$

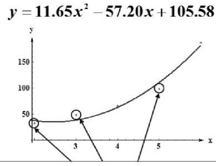
闭区域上多元函数求最值的一般步骤

将内部驻点和边界最值点处的函数值进行比较,得到函数在闭区域上的最值。

实际问题中最值问题的简化步骤

若区域内部只有一个驻点,且实际问题中的最值存在,则驻点即最值点。

$y=11.65x^2-57.20x+105.58$



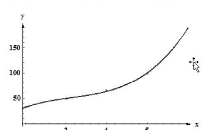
经验公式结果与实际数据结果误差 > 5km

设经验公式为三次多项式 $y=ax^3+bx^2+cx+d$。

总偏差 $\varepsilon(a,b,c,d)=\sum_{i=1}^{5}(y_i-ax_i^3-bx_i^2-cx_i-d)^2$。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b}=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial c}=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial d}=0\end{cases}\Rightarrow\text{唯一驻点为}\begin{cases}a^*=4.53\\ b^*=-42.69\\ c^*=144.76\\ d^*=-122.64\end{cases}$$

$y=4.53x^3-42.69x^2+144.76x-122.64$



三次多项式的拟合程度更好

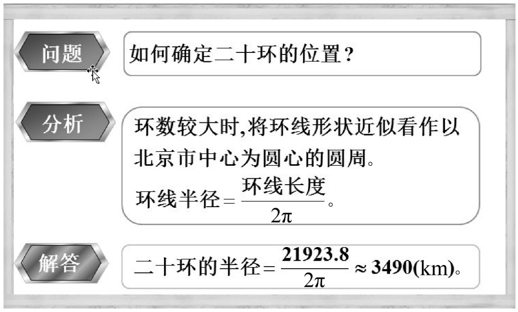
北京的二十环长度近似为

$4.53\cdot(20)^3-42.69\cdot(20)^2+144.76\cdot 20-122.64$

$=21923.8(\text{km})$

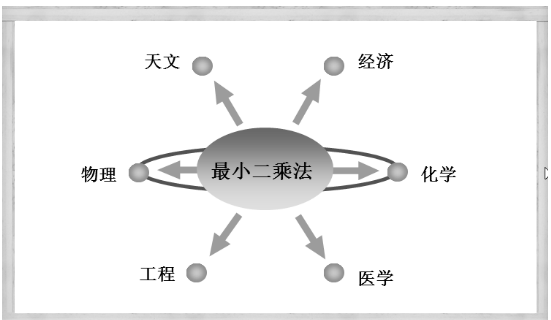
4．解决问题：北京的二十环位置（2 分钟）

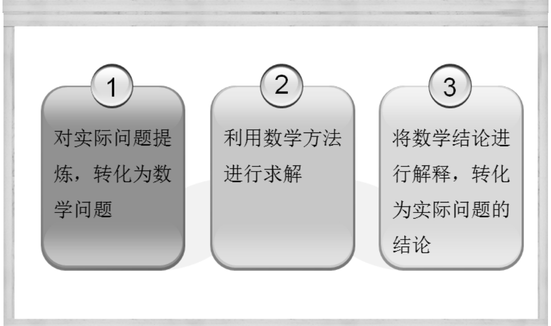
利用数学近似的思想求解北京二十环位置。



5．教学小结（1 分钟）

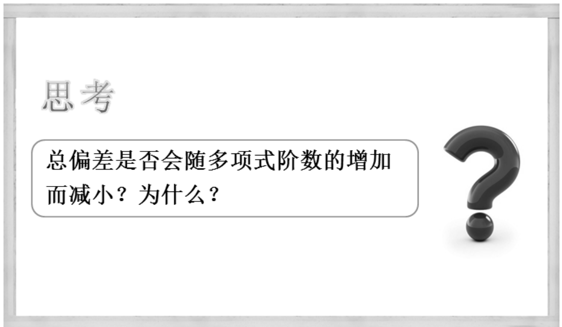
总结最小二乘法在各个领域内的应用，强调如何利用数学建模的思想和数学方法去解决实际问题。





6．课后思考题（1 分钟）

通过课后思考题，使学生对最小二乘法的用法和数学实质有更加深刻的理解。



五、教学总结

从北京的二十环位置这样一个实际问题出发，利用数学建模思想，将其转化为利用最小二乘法求经验公式的问题。通过多元函数求最值的应用，使学生加深对此方法的理解，同时激发学生对数学的兴趣，提高数学知识和生活实际的结合，培养他们利用数学方法去分析和解决实际问题的能力。

隐函数的求导法

吕　兴

北京交通大学

作 品 标 题：隐函数的求导法

所 属 课 程：高等数学（上）

相关知识点：隐函数、隐函数导数、对数求导法

知识点编码：0204

授 课 对 象：本科一年级学生

授 课 时 长：15 分钟

参 考 文 献：[1] 刘迎东. 微积分（上册）[M]. 北京：科学出版社，2010.

[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

本章前几节关于导数与微分的学习，主要基于显函数展开，而工程建设与实际应用中的很多问题都要借助隐函数描述。

（1）本节课给出隐函数的概念，揭示显函数与隐函数的区别。

（2）基于一元函数导数与微分间的关系，引入微分法求隐函数的导数，通过将自变量与因变量“一视同仁”，降低思维强度。

（3）作为隐函数求导的应用，讲授复杂显函数求导，体会数学中的转化思想。

二、教学目标

熟悉导数和微分的运算法则以及导数的基本形式：

（1）理解显函数与隐函数的区别。

（2）理解微分法求隐函数导数的原理，熟练掌握微分法求隐函数导数的步骤。

（3）熟练处理复杂显函数求导。

三、教学内容及重点难点分析

1．重点

（1）微分法求隐函数导数的原理：一元函数导数与微分的关系。

（2）对数求导法。

2．难点

（1）隐函数求导法：隐函数中，变量之间函数关系复杂，微分法将自变量与因变量“一视同仁”，避开了区分自变量与因变量的困难。

（2）复杂显函数隐式化处理，理解转化思想。

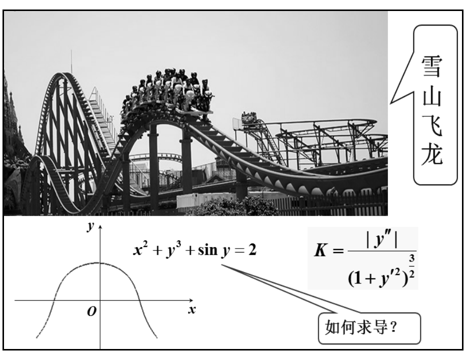
四、教学方法和过程

1．教学方法

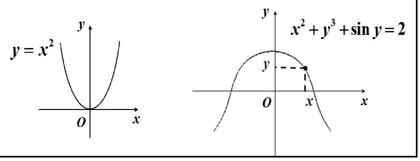
（1）讲授法，案例式教学，注意启发式提问。

（2）将多媒体教案与黑板板书相结合，利用电子教案展示过山车照片，提出问题；结合板书推导相关过程。

2．教学过程

程序	教学内容	教学进程与手段	时间
（1）引入	关于过山车的问题：   	在工程实践和现实生活中，很多曲线都难以用显函数表示；很多显函数问题也难以直接处理，这就需要寻找更好的解决办法。 模拟过山车某部分轨道，给出隐函数；如何计算曲率，提出隐函数如何求导	1 分钟

续表

程序	教学内容	教学进程与手段	时间
（2）隐函数定义、显化	对于过山车娱乐项目的刺激性与安全性展开讨论，引出隐函数的定义和解释： **1. 隐函数的定义** 由二元方程 $F(x, y)=0$ 所确定的 y 关于 x 的函数称为**隐函数(implicit function)**。 而形如 $y=f(x)$ 的函数，称为**显函数**。  $F(x,y)=0 \Longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的**显化**. 例如 $x^2+y^3-1=0 \xrightarrow{\text{隐函数显化}} y=\sqrt[3]{1-x^2}$  由方程 $x^2+y^3+\sin y=2$ 不能解出 y 来，因此该隐函数不能显化！  并不是任意一个隐函数都能够显化! 隐函数不易显化或不能显化 如何求导	（1）给出隐函数的定义及隐函数显化，并与显函数对比； （2）启发学生思考隐函数与显函数的区别，进一步，隐函数如何求导	2 分钟
（3）微分法求隐函数导数	板书并解释以下内容： 一元函数： 可微 $\Longleftrightarrow$ 可导 显函数：$y=f(x)$　　隐函数：$F(x,y)=0$ $\boxed{\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x}$ $\boxed{y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$ $\Longrightarrow$ 1. 微　2. 商	回顾一元函数可导与可微之间的关系，基于该关系，提出微分法求隐函数导数原理。 ——此处结合板书，给出框架	1 分钟

续表

<table>
<tr><th>程序</th><th>教学内容</th><th>教学进程与手段</th><th>时间</th></tr>
<tr>
<td>（4）隐函数求导数举例</td>
<td>
例1　求由方程 $\boxed{xy-e+e^y=0}$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

$x=0,y=1$

解　将方程两边求微分，得

这一步需要特别注意什么问题？

$$d(xy-e+e^y)=d(0)=0\Rightarrow ydx+xdy+e^ydy=0$$

$$\Rightarrow dy=-\frac{y}{e^y+x}dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x}\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{-1}{e}$$

你注意到隐函数导数表示式的特点了吗？

求隐函数在某一点处的导数时应特别注意什么？

2. 隐函数求导法

导数与微分间的关系启发,导数即“微商”，故可以用微分法求隐函数的导数；

板书六字方针：$\boxed{\text{求微分、写导数}}$。

例2　设 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解　将方程两边求微分，得

$$d(x-y+\frac{1}{2}\sin y)=d(0)=0$$

$$dx-dy+\frac{1}{2}\cos y dy=0$$

$$dy=\frac{2}{2-\cos y}dx$$

用复合函数求导法则，注意变量 y 是 x 的函数.

解得 $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{-\boxed{(2-\cos y)'_x}}{(2-\cos y)^2}=2\frac{-\sin y\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$

过山车轨道曲率：$x^2+y^3+\sin y=2$

$$\Rightarrow d(x^2+y^3+\sin y)=d(2)=0$$

$$\Rightarrow 2xdx+3y^2dy+\cos y dy=0$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+\cos y}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{18y^4+12y^2\cos y+2\cos^2 y+4x^2\sin y-24x^2y}{(3y^2+\cos y)^3}$$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

过山车轨道：$x^2+y^3+\sin y=2$

➢ 在轨道顶点A处：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A=0,\quad\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_A=-0.5306,\quad K=0.5306$$

➢ 在轨道下降点B处：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_B=-2.8284,\quad\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_B=2,\quad K=0.0741$$
</td>
<td>
（1）运用微分法，给出隐函数求一阶导的例子（提问：让学生思考关键点）；

（2）概括总结微分法求隐函数导数步骤；
——板书
（3）运用微分法，给出隐函数求二阶导的例子（提问：让学生思考关键点）；
（4）至此完满解决过山车轨道曲率问题;

（5）结合相关数据（一阶导、曲率）及其物理意义，分析并解释过山车轨道设计问题
</td>
<td>2 分钟

2 分钟

1 分钟

1 分钟</td>
</tr>
</table>

续表

程序	教学内容	教学进程与手段	时间
（5）隐函数求导的应用：对数求导法	**3. 复杂显函数求导** 思考：求 $y=x^x(x>0,x\neq 1)$ 的导数。 这是个显函数？还是隐函数？ **解** 将方程的两边取对数，得 $\ln y = x\ln x$, 再将上式两边求微分，得 对数求导法 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y = (\ln x+1)\mathrm{d}x$ 于是 $y' = y\cdot(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$。	对于一些复杂的显函数，虽然是显函数，但是处理起来很繁琐，启发学生转化为隐函数（转化思想）	2 分钟
（6）小结	主要内容： ①什么是隐函数； ②隐函数如何求导； ③隐函数求导有哪些应用。 重点难点： ①理解微分法求隐函数导数的原理； ②熟练掌握微分法求隐函数导数的步骤； ③复杂显函数隐化处理——转化思想	主要三方面的内容；熟记六字方针：求微分、写导数	2 分钟
（7）思考	①求函数 $y=x^{x^x}$ 的导数； ②转化思想对我们的学习与生活又有怎样的启发。 答案：① $y'=x^{x^x}\left(x^{x-1}+x^x\ln x(1+\ln x)\right)$	本节课掌握了隐函数求导的技能；另一方面要思考“转化思想”指导实践	1 分钟
（8）作业	P75　1(6)，1(8)，2	作业要求：独立思考、按时完成	
（9）反馈		根据学生练习、作业、考试等情况，追踪学生对本节内容的理解与掌握程度，及时反馈	

二元函数的连续性

朱圣芝

北京交通大学

作品标题：二元函数的连续性

所属课程：高等数学（下册）

相关知识点：二元函数的连续性

知识点编码：0903

授课对象：工科本科一年级学生

授课时长：15 分钟

参考文献：
[1] 同济大学应用数学系. 高等数学（下册）. 北京：高等教育出版社，2014.

[2] 用 Matlab 制作 gif，http://blog.csdn.net/ssy8stephy/article/ details/49585075.

一、教学背景

连续性是函数的重要性质，连续函数在有界闭区间、闭区域上的性质是函数求最值、介值等问题的基础。通过一元微积分的学习，学生已经掌握一元连续函数的概念与性质，以及一元函数发生间断的几种特征。推广到二元函数，连续性的概念从定义上看几乎不需做任何改动，但由于二元函数极限趋近过程的复杂多样性，导致二元函数出现间断的情形更为复杂多样。同时，由于二元函数的图像，相比于一元函数，空间表

现复杂多样，这时直接靠“看图说话”来得到二元函数的连续性分析较为困难。因此，判断二元函数在函数无定义点处以及改变函数定义方式的点上是否连续，相比于一元函数，要困难得多。

本教学单元通过与一元函数类比，引入二元函数连续的概念，并借助 Matlab 三维视图，通过对几个典型例子的研究分析，使学生既能够借鉴一元函数连续与间断的概念与性质，来分析判断二元函数的连续与间断，同时又能体会到从一元函数到二元函数，会出现某些在原则上是新的现象，新的方法。

二、教学目标

（1）理解并掌握二元函数连续与间断的概念。

（2）掌握二元初等函数的连续性的结论。

（3）学会分析判断二元函数的连续与间断。要求既能借鉴判断一元函数连续与间断的方法与途径，同时又能掌握判断二元函数连续与间断的特有方法与途径。

三、教学内容及重点难点分析

（1）复习一元连续函数的概念，引入二元函数连续性的定义。介绍二元初等函数的连续性结论。通过实例分析，学习判断二元函数连续与间断的方法与途径。

（2）教学重点：二元函数连续性的定义，二元初等函数的连续性的结论，判断二元函数的连续与间断。

（3）教学难点：如何使学生体会到从一元函数到二元函数，会出现某些在原则上是新的现象，新的方法，是本教学单元的难点。

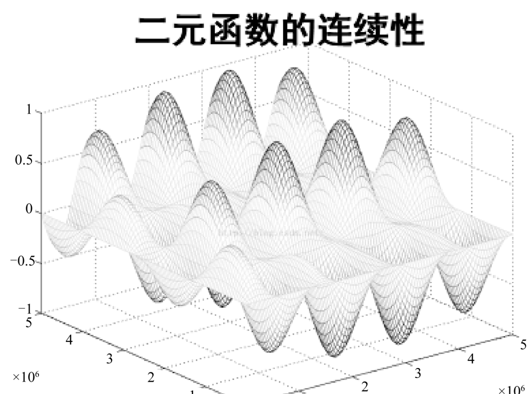
四、教学方法和过程

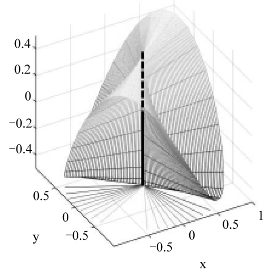
1．教学思路和创新点

一个数学概念的呈现，最好要有四个侧面同时呈现：图像，数值，符号与语言。传统的微积分教学课堂上偏重于符号与语言的严谨性，这虽然有助于培养学生的抽象思维能力，但缺乏生动直观性，使得一部分学生对微积分的学习产生畏难心理。从一元函数到二元函数，微积分教学的一个难点是二元函数的图像，相比于一元函数，空间表现复杂多样，需要学生有较强的空间概念与想象力。这时，借助图形帮助学生认知基本概念显得尤为重要。随着 Matlab 等数值计算软件的发展，在课堂上呈现复杂多样的二元函数图像已相对较为方便。本课程的设计思路正是基于这一点考虑，大量借助 Matlab 三维视图，使学生能深刻地体会到从一元函数到二元函数，会出现某些在原则上是新的现象，新的方法。

2．教学过程

课程介绍先由一个直观的二维波形图，展现二元函数连续的基本特征，紧接着呈现一个二元分段函数的图像动态图，引导学生考虑这时二元函数的连续性是否可以直观观察得到？





$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$f(x,y)$
是连续函数吗？

7

在得到否定答案后，强调连续性严格数学定义的好处。与一元连续函数的比较，几乎不需要做任何改动，引入二元函数的连续性，并介绍二元初等函数的连续性的结论。

2．二元函数的连续性

定义 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$，如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点处连续。

连续性的三个要素：

(1) $f(P)$ 在 P_0 点处有定义，

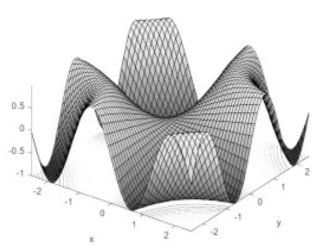
(2) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在，

(3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$。

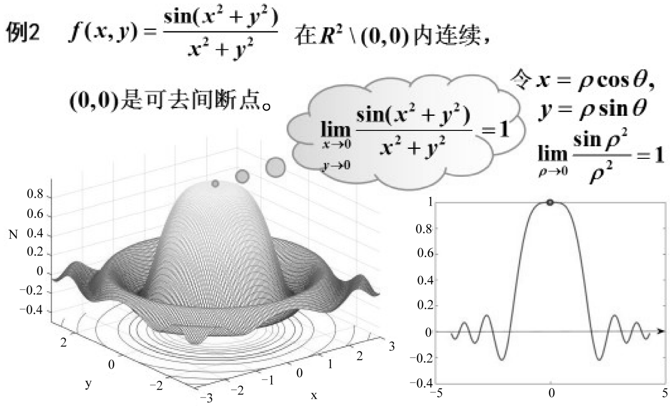
2．二元函数的连续性

二元初等函数在其定义区域内是连续的。

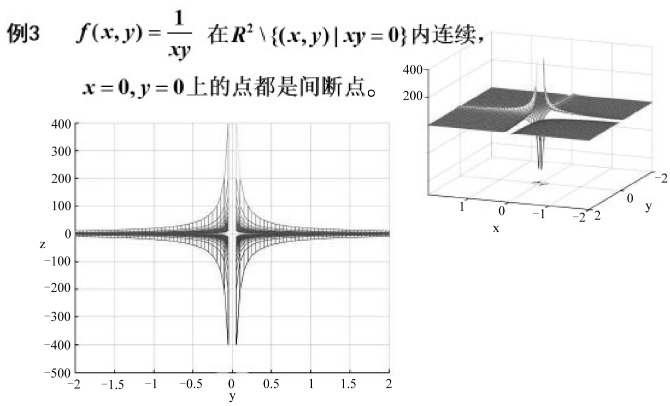
例 1 $f(x,y)=\sin xy$ 在 R^2 上连续。



至此，判断一个二元函数是否连续,只需集中考虑函数无定义的点，以及改变函数定义方式的点上。随后，通过四个典型例子的分析，主要突出从一元函数到二元函数，函数间断会出现某些在原则上是新的现象，需要采取新的方法。



通过这个例子可以看到，判断二元函数的连续与间断，可以采用并借鉴一元函数时学过的知识与方法。



通过这个例子可以看到，二元函数发生间断的情形要比一元函数复杂，这时间断点可以连成若干条直线或曲线。

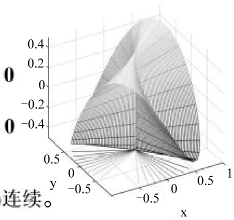
下面回到一开始观察过的二元函数。我们只讨论它在(0,0)点处的连

续性，因为在其他点处，它是初等函数，自然是连续的。

例4 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)的连续性。

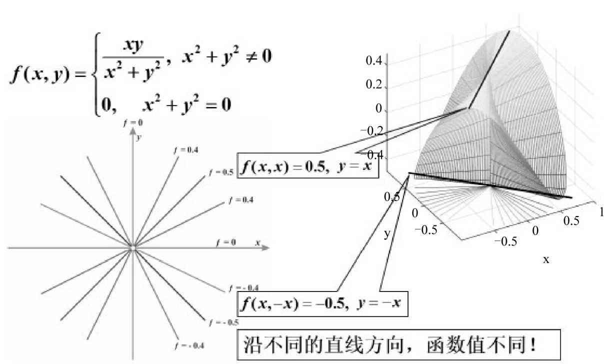


解 令 $y=0$, $f(x,0)=0$, $f(x,0)$连续。

令 $x=0$, $f(0,y)=0$, $f(0,y)$ 连续。

？沿两个特殊方向函数都连续, 且函数值相同, 函数在(0,0)处连续?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



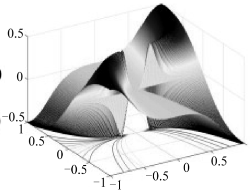
通过这个例子分析，观察到由于在(0,0)点处函数趋近方式的不同，沿不同的直线方向函数极限虽然存在，但不相等，因此函数在(0,0)点处不连续。这就说明虽然二元函数的连续性定义与一元函数完全类同，但由于二元函数定义在平面区域上，它的极限趋近方式是复杂多样的，这导致二元函数出现间断的情形更为复杂多样。而一元函数定义在区间上，那时，我们只需要左看右看，就可以得到极限分析结果。

紧接着，提出进一步的问题：是否对二元函数，这样观察就够用了呢？也就是说，是否沿着平面上各个直线方向极限值都存在并且相等，且等于这一点处的函数值，函数就在该点处连续呢？

例5 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)的连续性。



解 取 $y=kx(k\neq0)$,

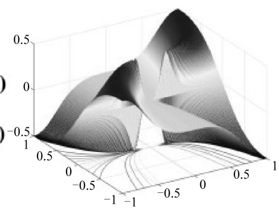
$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cdot kx}{x^6+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^4}{k^2x^2}=0,$$

? 沿过(0,0)的任意直线方向函数都连续,且极限值相同,函数在(0,0)处连续？

例5 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)的连续性。



解 取 $y=kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx^3}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2},$$

其值随k的不同而变化，因此极限不存在。

故函数在(0,0)处不连续。

通过这个例子分析，大家进一步看到由于二元函数极限趋近方式的复杂多样性，导致二元函数出现间断的情形更为复杂多样。

最后，小结课程基本知识点，并留适量练习，检验学生对二元函数连续性的认识与掌握程度。

3. 小结

(1) 二元函数连续 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$;

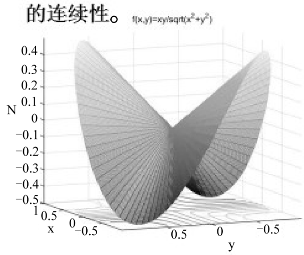
(2) 二元初等函数在其定义区域内是连续的;

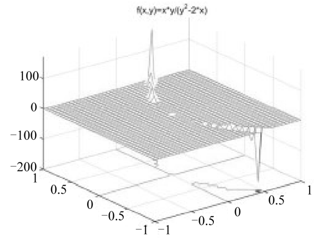
(3) 判断二元函数的连续与间断, 要注意二元函数极限趋近方式的复杂多样性!

练习：讨论 (1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{y^2-2x}$

的连续性。





五、教学总结

本课程单元通过直观比较，问题驱动，引入函数连续性概念，给出二元函数连续性的极限定义方式。并结合实例加强理解二元函数的连续与间断，重点突出从一元函数到二元函数，会出现某些在原则上是新的现象，新的方法，以达到预期的教学目标。

数列极限的例子

曹丽梅

北京科技大学

作 品 标 题：数列极限的例子

所 属 课 程：高等数学（上）

相关知识点：数列极限的几何解析和例子

知识点编码：010204、010205

授 课 对 象：本科一年级学生

授 课 时 长：8 分 48 秒

参 考 文 献：[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

[2]《超越吉米多维奇：数列的极限》编写组. 超越吉米多维奇数列的极限[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.

[3] 瓦罗别耶夫. 斐波那契数列[M]. 周春荔，译. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.

[4] 李海英，赵建英. 数列极限在实际中的应用[J]. 研究与开发，2013，(25):24-26.

[5] 方国敏，谢蔚. 高等数学中数列极限的应用[J]. 产业与科技论坛，2014，13(17):141-142.

一、教学背景

极限概念是数学中最重要和最基本的概念之一，它是研究微积分学的必备工具。微积分学中其他重要概念（如导数、微分、积分等）都是用极限概念来表述的，而且它们的运算和性质也要用极限的运算和性质来推导，所以，极限概念的掌握至关重要。

二、教学目标

本节要求学生真正理解数列极限的概念并掌握极限的思想方法，能够利用数列极限的定义证明一些简单数列的极限。培养学生的观察能力和抽象概括能力，充分挖掘出学生思维的批判性和深刻性。

通过数列极限的例子，初步认识有限与无限、近似与精确、量变与质变，揭示数学世界中的辩证关系，使学生清楚地认识到数列极限的精髓。

三、教学内容及重点难点分析

1. 主要内容

（1）数列极限的概念。

（2）数列极限的几何意义。

（3）数列极限的应用。

2. 教学重点

（1）理解数列极限的几何意义。

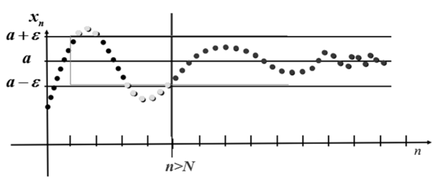
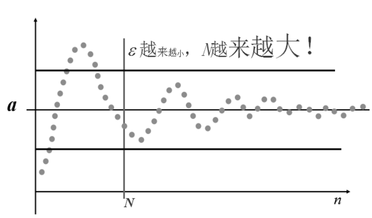
（2）掌握用数列极限解决实际问题的能力。

3．教学难点

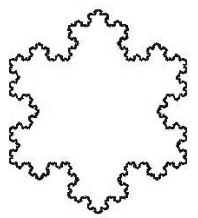
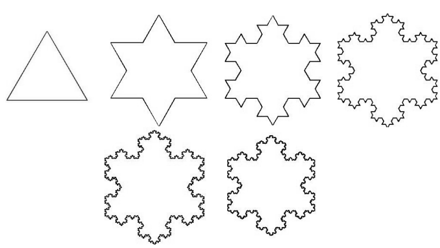
（1）如何在具体问题中应用数列极限。

（2）理清数列极限、函数极限的内在关系。

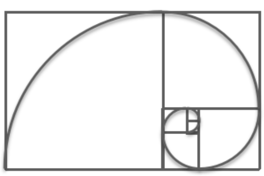
四、教学方法和过程

教学内容	教学意图	教学设计
复习数列极限的定义 给定数列$\{x_n\}$和实数a, 对$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$,当$n>N$时，有$\|x_n-a\|<\varepsilon$, 那么称$a$是数列$\{x_n\}$的极限，或者称$\{x_n\}$收敛于$a$。 记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$　或　$x_n\to a$,（$n\to\infty$）。 解释：① 关于ε的正值性、任意性与确定性； ② 关于N的存在性与非唯一性，对N只要求存在，不在乎大小	明确课题，给出数列极限的严格定义	**强调：** $\forall$——任意； ε——正数； [epsilon]； $\exists$——存在； lim——趋向于
数列极限的几何解释 数列$\{x_n\}$极限为a，则当$n>N$时，有$\|x_n-a\|<\varepsilon$， 即有$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$。  当$n>N$时，所有的点都落入了$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$这个带状区域内。 N之前有有限项，而N之后有无穷多项。也可以动态地看$\varepsilon-N$的关系。  当ε越小，N的取值越来越大，$\varepsilon-N$形成了广义的反比例关系	结合图形，讲解数列极限的几何解释	**引导思考：** N之前是有限项，而N之后是无限项。主要看无限项的变化趋势。有限项不改变整体变化趋势

续表

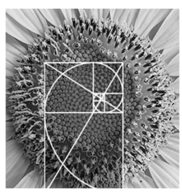
教学内容	教学意图	教学设计
例一：科赫雪花的面积问题 科赫雪花是由瑞典数学家科赫（H.von Koch，1870—1924）在研究构造连续而不可微函数时，构造出来的曲线。  科赫雪花 将一条线段三等分，先以中间的一段为底边作一个正三角形，然后再去掉这个三角形的底边，于是可以得到一个由 4 个长度为原线段长度三分之一的线段构成的折线。如果我们对构成这条折线的每一条线段不断重复上述步骤，得到的曲线就是所谓的“科赫雪花”。  下图给出的就是从一个正三角形进行了五次变换后所得到的图形：  下面计算图形的面积。设正三角形的面积 $S_1=1$	给出科赫雪花的构造过程，分析每次变换时边及面积的变化规律。 通过用数列极限来计算科赫雪花的面积，让学生对数学产生兴趣，发现如此复杂的图形的面积竟然可以这么简单地求出	**引导思考**：科赫雪花的面积可以计算吗？ **引导思考**：科赫雪花的面积是有限的，每次变换所形成的面积形成一个收敛数列，那么每次变换过程中，雪花的周长是否也构成数列呢？此时的数列是收敛还是发散的呢？可课后思考

续表

教学内容	教学意图	教学设计
则经过一次变换，三角形变为 12 边形。设此时的面积为 S_2， $$S_2=S_1+3\times\frac{1}{9}S_1$$ 再由12边形经过变换得到48边形，设此时的面积为S_3， $$S_3=S_2+3\times4\times(\frac{1}{9})^2S_1$$ 以此类推，经过$n-1$次变换的面积设为S_n， $$S_n=S_{n-1}+3\times4^{n-2}\times(\frac{1}{9})^{n-1}S_1$$ 可以看出图形的面积S_1，$S_2,\cdots$，$S_n\cdots$形成了一个数列。经简单计算可给出S_n的通项公式为 $$S_n=\frac{8}{5}-(\frac{4}{9})^{n-1}$$ 说明我们要求的科赫雪花的面积为数列$\{S_n\}$的极限。 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8}{5}-(\frac{4}{9})^{n-1}=\frac{8}{5}$$ 复杂的科赫雪花面积极限，原来是一个常数。因此数列收敛		
例二：斐波纳契数列  观察下列一组数， 1,1,2,3,5,8,13,⋯ 观察发现从第三项开始，每一项等于前两项之和，这个数列就是数学史上非常著名的斐波纳契数列。  把斐波纳契数列的每一项作为正方形的边长画出来，发现矩形的宽长之比，随着 n 越来越大，无限趋向于黄金分割点。把此矩形称为黄金矩形。在每个正方形中画四分之一个圆，连接起来就展现出螺旋状曲线。这就是著名的斐波纳契螺旋线	介绍历史上著名的斐波纳契数列，播放图片有助于学生理解该例子，并吸引学生兴趣。 让学生看到数学在生活中产生的美	通过具体数据，分析当 n 越大时，斐波纳契数列的相邻两项之比接近黄金分割点； **引导思考：** 以斐波纳契数列为边长构造的正方形，拼凑之后得到的矩形的宽长之比接近于什么呢

续表

<table>
<tr><th>教学内容</th><th>教学意图</th><th>教学设计</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>n</th><th>$F_n : F_{n+1}$</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>1 : 1</td><td>1.000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1 : 2</td><td>0.500000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2 : 3</td><td>0.666667</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3 : 5</td><td>0.600000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5 : 8</td><td>0.625000</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8 : 13</td><td>0.615385</td></tr>
<tr><td>7</td><td>13 : 21</td><td>0.619048</td></tr>
<tr><td>···</td><td>···</td><td>···</td></tr>
<tr><td>12</td><td>144:233</td><td>0.618025</td></tr>
<tr><td>13</td><td>233:377</td><td>0.618037</td></tr>
<tr><td>14</td><td>377:610</td><td>0.618032</td></tr>
</table>

矩形的宽长之比，即为斐波纳契数列的相邻两项之比。而这样一个数学属性居然在大自然中、在生活里处处散发着和谐之美！我们通过下面的图片感受一下。
  


产生这种现象的原因是斐波纳契数列的数学属性和植物或动物生长的动力学属性有吻合的地方。
画家们发现，按 0.618:1 来设计腿长与身高的比例，画出的人体身材最优美。世界小姐冠军张梓琳，双腿与身高的比值接近 0.618，从而整体上给人和谐与悦目之美
</td><td>以大自然中的海螺、向日葵等图片展现大自然中的斐波纳契螺旋线。

通过世界选美小姐张梓琳的双腿与身高之比接近黄金分割，再一次强调黄金数在自然界广泛存在</td><td>引导思考：
能否再举出一些实际生活中的黄金矩形、斐波纳契螺旋线的例子</td></tr>
<tr><td colspan="3">教学理念：通过例题的讲解，帮助学生巩固抽象的数学概念，加深数例极限概念的理解</td></tr>
</table>

拉格朗日乘数法

杨卫星
北京化工大学

作 品 标 题：拉格朗日乘数法
所 属 课 程：高等数学（下）
相关知识点：拉格朗日乘数法
知识点编码：091402
授 课 对 象：工科本科一年级学生
授 课 时 长：12 分 52 秒
参 考 文 献：同济大学数学系．高等数学[M]. 7 版．北京:高等教育出版社，2014.

一、教学背景

拉格朗日乘数法在很多领域都有广泛的应用。就经济学领域而言，效用最大化问题、利润最大化问题、成本最小化问题等都可以利用拉格朗日乘数法解决。掌握了拉格朗日乘数法，学生可以解决很多实际问题。

二、教学目标

1. 知识层面

理解条件极值的概念和拉格朗日乘数法的使用过程。

2. 能力层面

培养学生观察、分析、概况、解决问题的能力。

3. 认知层面

加强与实际问题的联系，通过鲜活生动的实例，让学生认识到数学是多么有用，从而让学生在学习过程中获取成就感。

三、教学内容即重点难点分析

教学内容：条件极值、拉格朗日乘数法的使用。
教学重点：拉格朗日辅助函数的构造。
教学难点：拉格朗日乘数法的实施。

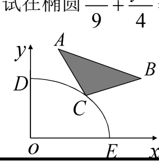
四、教学方法和过程

（1）启发式教学，用生活中的简单例子引起学生的兴趣，并很自然地引出知识点。

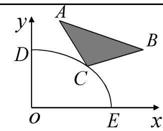
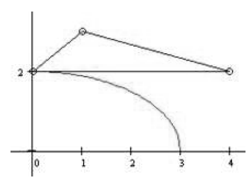
（2）化繁入简，尽量把复杂的数学方法讲解得更为简单，更好理解。

（3）练习中提炼，讲完方法后，趁热打铁，让学生解决问题，加深对知识的理解。

（4）层层深入法，基本方法掌握后，推广为更一般、应用更广泛的方法。

教学步骤	教学内容
问题的引入	1. 引例 快到月底了，月光族王同学只剩 80 元钱，他决定用来购买两种急需物品：数学作业本和方便面。设他购买 x 个作业本，y 桶方便面能达到最佳效果，效用函数为 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 。设每个作业本 4 元，每桶方便面 5 元，问他如何分配这 80 元以达到效用最大化
分析问题，引出条件极值的概念	问题的实质：求效用函数 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 在满足预算约束条件 $4x+5y=80$ 下的极值点。 极值问题$\begin{cases}\text{无条件极值：对自变量纸样定义域限制}\\\text{条件极值：对自变量除定义域限制外，还有其他条件限制}\end{cases}$
介绍拉格朗日乘数法	2. 拉格朗日乘数法  求二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值， 引入辅助函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 则极值点满足$\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0\\F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0\\F_\lambda=\varphi=0\end{cases}$ 辅助函数 F 称为拉格朗日（Lagrange）函数。利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法
解决刚才的例子	引例的解决方案 设拉格朗日辅助函数为 $$F=\ln x+\ln y+\lambda(4x+5y-80)$$ 则有$\begin{cases}F'_x=\dfrac{1}{x}+4\lambda=0\\F'_y=\dfrac{1}{y}+5\lambda=0\\F'_\lambda=4x+5y-80=0\end{cases}$　　解得唯一驻点：$x=10,y=8$ 所以王同学买 10 个作业本，8 桶方便面能达到效用最大化
趁热打铁，再解决一个例子	3. 实例 已知平面上两定点 $A(1,3),B(4,2)$，试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1(x>0,y>0)$ 圆周上求一点 C，使 ΔABC 面积 S_Δ 最大 

续表

教学步骤	教学内容
例子的分析和解决	分析：设 C 点坐标为(x,y)，则  $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$ $=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|(0,0,x+3y-10)\right\|$ $=\frac{1}{2}\|x+3y-10\|$
例子的分析和解决	设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$ 解方程组$\begin{cases}2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0\\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0\\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0\end{cases}$  得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}},y=\frac{4}{\sqrt{5}}$，求得对应面积 $S\approx1.646$
拉格朗日乘数法的推广	4. 推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形： 例如，求函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$， $\psi(x,y,z)=0$下的极值。 设 $F=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$ 解方程组$\begin{cases}F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0\\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0\\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0\\ F_{\lambda_1}=\varphi=0\\ F_{\lambda_2}=\psi=0\end{cases}$可得到的条件极值的可疑点
小结和思考	5. 小节和思考 • 拉格朗日乘数法 • 拉格朗日乘数法的应用 • 拉格朗日乘数法的推广 思考：将正数 12 分成三个正数 x,y,z 之和，使得 x^3y^2z 最大

五、教学总结

拉格朗日乘数法是在实际中应用非常广泛的数学方法。本小节从一个效用最大化的例子入手，轻松引出了条件极值的概念，接着介绍了拉格朗日乘数法的使用，然后又解决了一个实际问题，并对拉格朗日乘数法做了推广。整节课没有复杂的推导和证明，以解决问题为驱动，让学生很轻松地掌握了知识点。整节课轻松有趣，环环相扣，达到了很好的教学效果。

偏导数

李　鹤

北京邮电大学

作 品 标 题：偏导数

所 属 课 程：高等数学

相关知识点：偏导数的定义，偏导数的计算，偏导数的几何意义

知识点编码：090401，090402，090403

授 课 对 象：理工类本科一年级学生

授 课 时 长：15 分钟

参 考 文 献：同济大学数学系. 高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

“偏导数”选自《高等数学》多元微分学部分。像在一元函数中研究函数的变化率那样，许多实际问题也要求我们考察多元函数的因变量随其一个自变量变化时的变化率，这就是多元函数偏导数的概念。通过类比的数学思想，我们将看到，微分法从一元函数推广到二元函数，其中有许多类似之处，同时在某些方面又存在着很大的差异，需让学生仔细领会这种不同。

本节的教学内容包括：

（1）多元函数偏导数的定义。

（2）多元函数偏导数的计算。

（3）多元函数偏导数的几何意义。

二、教学目标

1．知识层面

（1）理解偏导数的定义。

（2）掌握计算函数的偏导数的多种方法。

（3）理解偏导数的几何意义。

（4）会用几何意义求函数的偏导数。

（5）理解在一点偏导数存在与连续的关系。

2．能力层面

（1）通过类比的数学思想，遵循“用‘已知’认识‘未知’、研究‘未知’、解决‘未知’”的思想，将一元函数的微分学推广到多元函数。

（2）通过解决“绳子上点的振动速度”问题的引导，强调“研究动机”的教学模式，引导学生进行归纳总结，不仅给人以知识，而且给人以科学的思维和科学行动的方法与准则。

（3）逐步引导学生养成用几何直观去思考问题的习惯。

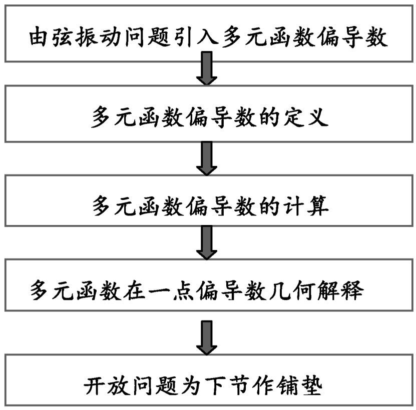
3．认知层面

（1）认识到数学的双重逻辑结构，一方面是演绎科学，另一方面也来源于实际问题的研究。

（2）通过“铺设水管道”的问题引导学生将所学知识同实际生活中的问题紧密联系在一起，认识到实际问题驱动着数学的发展。

三、教学内容及重点难点分析

1. 教学思路



2. 重点

本节课为概念教学课型，教学重点如下。
（1）偏导数的定义。
（2）偏导数的几何解释。
（3）函数在一点偏导存在和连续之间的关系。
处理方法：
（1）重点讲解，多媒体有效辅助。
（2）两个计算偏导的例子自然给出所学偏导存在和连续的关系。
（3）数形结合的方法帮助学生分析问题。

3. 难点

本节课的教学难点如下。
（1）用偏导数的定义计算分段函数的偏导数。
（2）理解函数在一点偏导数存在和连续之间的关系。

处理方法：

（1）借助类比的方法把一元函数的导数推广到多元函数偏导数，分析偏导数的本质是固定一个变量对另一变量求导。

（2）利用两个例子（3，4），让学生归纳并理解偏导数存在和连续之间“不可思议”的结论。

四、教学方法

（1）以课堂讲授为主，适当穿插提问、思考等互动教学方式。

（2）以多媒体课件为主，制作中注重数字化特点，形式多样性，同时辅助动画进行必要的启发。

五、教学总结

（1）讲授内容根据教材和生活经验积累整理而得，本节课的讲授基于问题引导型教学，在问题解决的过程中，让学生自己总结归纳出结论。

（2）教学中注重几何直观的作用，介绍偏导数的几何意义，完成偏导数的计算，分析偏导存在和连续的关系，使得抽象思维同形象思维结合起来，充分展现问题的本质，突破学生理解上的难点。

（3）教学中注重类比、对比的思想（多元函数与一元函数），培养学生养成“用‘已知’认识‘未知’、研究‘未知’、解决‘未知’”的习惯，认清两者相同点和显著的差异。

实对称矩阵的正交对角化

苏贵福
北京化工大学

作 品 标 题：实对称矩阵的正交对角化
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：矩阵的正交对角化
知识点编码：050402
授 课 对 象：信息专业本科生
授 课 时 长：15 分钟
参 考 文 献：[1] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2007.
[2] 姜广峰，崔丽鸿. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2016.

一、教学背景

深入讨论一般矩阵化为对角矩阵的问题后，鉴于实对称矩阵具有很多良好的性质，从而衍生出其对角化问题。

二、教学目标

准确理解相似矩阵的定义；掌握方阵对角化的思想方法。

三、教学内容

熟练掌握方阵对角化的思想方法。

四、教学过程

1．复习回顾实对称矩阵的定义及相关性质

1）协方差矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \operatorname{cov}(x_1,x_1) & \operatorname{cov}(x_1,x_2) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1,x_t) \\ \operatorname{cov}(x_2,x_1) & \operatorname{cov}(x_2,x_2) & \cdots & \operatorname{cov}(x_2,x_t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_t,x_1) & \operatorname{cov}(x_t,x_2) & \cdots & \operatorname{cov}(x_t,x_t) \end{bmatrix}$$

以协方差矩阵为例加强对实对称矩阵的理解。

2）实对称矩阵的几个重要性质

定理 6.2 属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理 6.6 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是它具有 n 个线性无关的特征向量。

定理 6.9 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交。

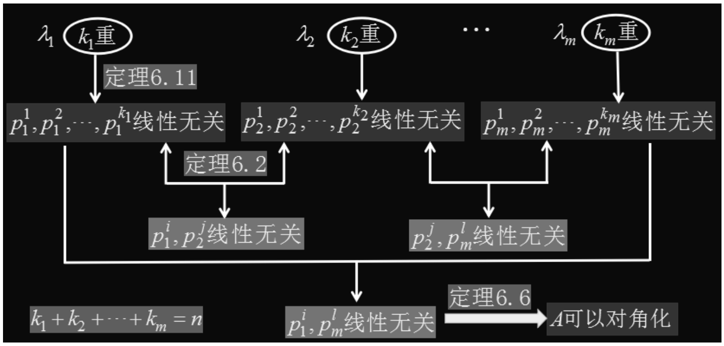
定理 6.11 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，λ是 $\boldsymbol{A}$ 的任一 k 重特征值，则对应于特征值λ恰有 k 个线性无关的特征向量。

2．实对称矩阵的对角化

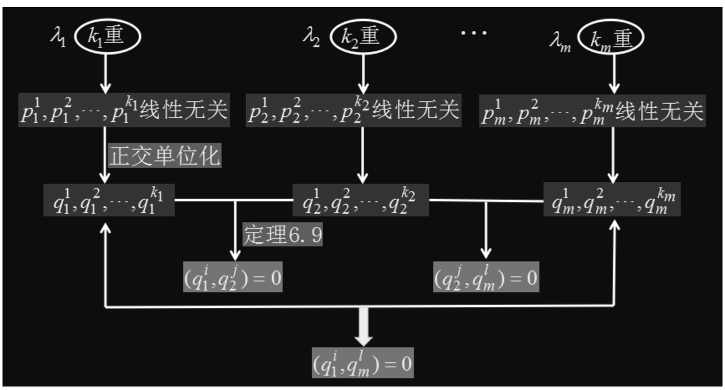
1）判定定理

定理 6.12 任意 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化，且能与对角矩阵正交相似，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵。

证明 首先说明实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。



下面寻找满足条件的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 。



获得正交单位向量组 $q_1^1,q_1^2,\cdots,q_1^{k_1},q_2^1,q_2^2,\cdots,q_2^{k_2},\cdots,q_m^1,q_m^2,\cdots,q_m^{k_m}$ ，以该向量组为列构造矩阵，相应矩阵即为所求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 。容易验证 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$ 。证毕！

2）实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤

（1）求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值。

（2）求出属于每一个特征值的特征向量。

（3）对特征向量施密特正交化、单位化。

（4）以上述正交单位向量组为列构造矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 。

（5）矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 即为所求。

3. 应用举例（葡萄酒分类）

现有三种葡萄酒的 178 个样本，每个样本含有 13 个参数：

A1	14.23	1.71	2.43	15.6	127	2.8	3.06	0.28	2.29	5.64	1.04	3.92	1065
A2	13.2	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	1.28	4.38	1.05	3.4	1050
A3	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.8	3.24	0.3	2.81	5.68	1.03	3.17	1185
A58	13.29	1.97	2.68	16.8	102	3	3.23	0.31	1.66	6	1.07	2.84	1270
A59	13.72	1.43	2.5	16.7	108	3.4	3.67	0.19	2.04	6.8	0.89	2.87	1285

酒精度　酸度　镁含量

B1	12.37	0.94	1.36	10.6	88	1.98	0.57	0.28	0.42	1.95	1.05	1.82	520
B2	12.33	1.1	2.28	16	101	2.05	1.09	0.63	0.41	3.27	1.25	1.67	680
B3	12.64	1.36	2.02	16.8	100	2.02	1.41	0.52	0.62	5.75	0.98	1.59	450
B70	12.37	1.63	2.3	24.5	88	2.22	2.45	0.4	1.9	2.12	0.89	2.78	342
B71	12.04	4.3	2.38	22	80	2.1	1.75	0.42	1.35	2.6	0.79	2.57	580

C1	12.86	1.35	2.32	18	122	1.51	1.25	0.21	0.94	4.1	0.76	1.29	630
C2	12.88	2.99	2.4	20	104	1.3	1.22	0.24	0.83	5.4	0.74	1.42	530
C3	12.81	2.31	2.4	24	98	1.15	1.09	0.27	0.83	5.7	0.66	1.36	560
C47	13.17	2.59	2.37	20	120	1.65	0.68	0.53	1.46	9.3	0.6	1.62	840
C48	14.13	4.1	2.74	24.5	96	205	0.76	0.56	1.35	9.2	0.61	1.6	560

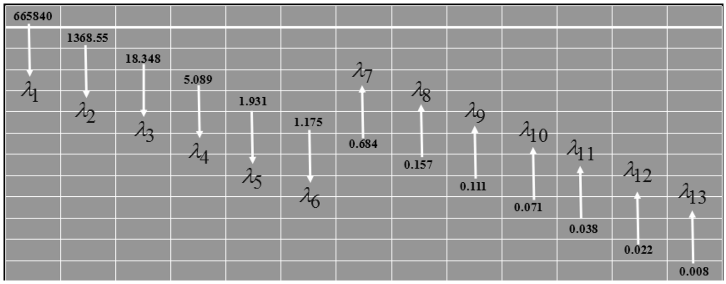
问题：提取这三种葡萄酒的主要特征，能够快速甄别任意一新葡萄酒样本的所属问题。

解：根据三类葡萄酒的 178 个样本构造一 13×178 矩阵 $\boldsymbol{R}$，如下所示：

$$
\begin{bmatrix}
14.23 & 13.2 & \cdots & 13.72 & 12.37 & \cdots & 12.04 & 12.86 & \cdots & 14.13 \\
1.71 & 1.78 & \cdots & 1.43 & 0.94 & \cdots & 4.3 & 1.35 & \cdots & 4.1 \\
2.43 & 2.14 & \cdots & 2.5 & 1.36 & \cdots & 2.38 & 2.32 & \cdots & 2.74 \\
15.6 & 11.2 & \cdots & 16.7 & 10.6 & \cdots & 22 & 18 & \cdots & 24.5 \\
127 & 100 & \cdots & 108 & 88 & \cdots & 80 & 122 & \cdots & 96 \\
2.8 & 2.65 & \cdots & 3.4 & 1.98 & \cdots & 2.1 & 1.51 & \cdots & 2.05 \\
3.06 & 2.76 & \cdots & 3.67 & 0.57 & \cdots & 1.75 & 1.25 & \cdots & 0.76 \\
0.28 & 0.26 & \cdots & 0.19 & 0.28 & \cdots & 0.42 & 0.21 & \cdots & 0.56 \\
2.29 & 1.28 & \cdots & 2.04 & 0.42 & \cdots & 1.35 & 0.94 & \cdots & 1.35 \\
5.64 & 4.38 & \cdots & 6.8 & 1.95 & \cdots & 2.6 & 4.1 & \cdots & 9.2 \\
1.04 & 1.05 & \cdots & 0.89 & 1.05 & \cdots & 0.79 & 0.76 & \cdots & 0.61 \\
3.92 & 3.4 & \cdots & 2.87 & 1.82 & \cdots & 2.57 & 1.29 & \cdots & 1.6 \\
1065 & 1050 & \cdots & 1285 & 520 & \cdots & 580 & 630 & \cdots & 560
\end{bmatrix}
$$

作矩阵 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{178}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，不难发现 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵。根据定理 6.12，该

矩阵必可对角化，下面求出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并按从大到小的顺序排列：



与上述特征值对应的特征向量为。

0.009	0.076	0.065	0.051	0.114	0.073	0.422	0.255	0.799	0.060	0.266	0.114	0.015
0.011	0.074	0.015	0.013	0.012	0.042	0.625	0.747	0.044	0.170	0.112	0.028	0.003
0.178	0.188	0.946	0.072	0.070	0.150	0.016	0.001	0.040	0.007	0.065	0.022	0.003
0.001	0.003	0.056	0.001	0.004	0.002	0.023	0.108	0.280	0.182	0.906	0.228	0.021
0.002	0.000	0.003	0.000	0.002	0.005	0.007	0.003	0.048	0.007	0.258	0.958	0.116
0.029	0.008	0.003	0.851	0.247	0.165	0.266	0.217	0.241	0.096	0.018	0.015	0.003
0.076	0.013	0.119	0.514	0.376	0.263	0.464	0.390	0.315	0.197	0.012	0.008	0.003
0.960	0.162	0.216	0.047	0.035	0.017	0.036	0.029	0.004	0.011	0.019	0.004	0.000
0.021	0.032	0.125	0.002	0.038	0.913	0.297	0.187	0.146	0.062	0.006	0.012	0.002
0.004	0.058	0.001	0.017	0.103	0.055	0.106	0.332	0.062	0.913	0.152	0.034	0.006
0.197	0.961	0.147	0.024	0.030	0.006	0.061	0.034	0.074	0.071	0.010	0.008	0.001
0.041	0.003	0.023	0.011	0.875	0.195	0.201	0.139	0.299	0.210	0.029	0.020	0.003
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.002	0.005	0.119	0.993
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}

对特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{13}$ 施以正交化单位化，得向量组 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_{13}$，进而存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_{13}]$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{13})$：

$$
Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & & \\
& \lambda_2 & & & & & & & & \\
& & \lambda_3 & & & & & & & \\
& & & \lambda_4 & & & & & & \\
& & & & \lambda_5 & & & & & \\
& & & & & \lambda_6 & & & & \\
& & & & & & \lambda_7 & & & \\
& & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & \lambda_{12} & \\
& & & & & & & & & \lambda_{13}
\end{bmatrix}
$$

观察发现矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的后 7 个特征很小，因此可将它们对应的特征向量删除，使得剩余特征值对应的特征向量衍生出一个 6 维向量，此向量组

即为反映葡萄酒品质的最重要的参数。这样便完成了对葡萄酒的分类。

【备注 1】本例采用 PCA 分析法，借助实对称可对角化理论对葡萄酒予以分类，其中涉及 PCA 降维环节，通过 Matlab 软件分析降维对分类的误差影响不大。

【备注 2】在构造对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 时，应特别注意排序的对应性。

4．课堂练习

试求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得下列矩阵可对角化：

$$(1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 0 & 3 & & \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 4 & \\ & 3 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 10 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

【提示】第一组同学考虑(1)；第二、三组同学考虑(2)，此题的求解借助 Matlab 软件将会更简单。

5．课后作业

课本 215 页第四题、第六题及第七题。

五、教学总结

（1）刻画了任意实对称矩阵可对角化问题，并探究在葡萄酒分类问题中的应用。

（2）利用定理 6.12 寻找恰当的正交矩阵，使得已知实对称矩阵相似于一对角矩阵。

（3）Matlab 软件在处理与矩阵相关问题时发挥重要的作用。

最大线性无关组与向量组的秩

师钦贤
北京石油化工学院

作 品 标 题：最大线性无关组与向量组的秩
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：线性表示、线性相关、线性无关、最大线性无关组、秩
知识点编码：040301
授 课 对 象：本科一、二年级学生
授 课 时 长：12 分 16 秒
参 考 文 献：[1] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 6 版.北京：高等教育出版社，2014.
[2] 杜建卫，王若鹏. 数学建模基础案例[M]. 2 版. 北京：化学工业出版社，2014.

一、教学背景

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题。在前面的章节中，我们已经学习了向量组线性相关和线性无关的相关知识，明确了向量组线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可以由其余向量线性表示。于是我们自然会关心一个向量组中，哪些向量是**“多余的”**，哪些向量是**“不可缺少”**的，这里的“多余”向量是指可以被“不可缺少”的向量线性表示的向量，而这里“不可缺少”的向量构成的向量组

即为本节要学习的最大线性无关组。

二、教学目标

1．知识层面

（1）正确理解最大线性无关组的定义和等价定义以及向量组秩的概念。
（2）会求向量组的最大线性无关组和向量组的秩。
（3）会把不属于最大线性无关组的向量用最大线性无关组线性表示。

2．能力层面

（1）引导学生建立实际问题与数学的转化，教会学生运用所学的理论知识分析和表达相关实际问题。
（2）学会用“无限转化为有限”的数学思维方法去研究问题。
（3）培养学生发现问题、解决问题的能力。

三、教学内容及重点难点分析

1．教学内容

由案例“选择需要生产的混凝土的类型”出发，引出最大线性无关组和秩的概念，并利用具体的例子从几何直观和最大线性无关组的定义两方面加深对概念的理解，然后在对案例求解的过程中，学习求最大无关组与向量组的秩的方法。

2．教学重点

理解最大线性无关组与向量组的秩的概念，并掌握求最大无关组和秩的方法，以及把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示。

3．教学难点

建立实际问题与数学转换，将案例提出的问题转换为求最大无关组与向量组秩的问题。

四、教学方法和过程

1．教学方法

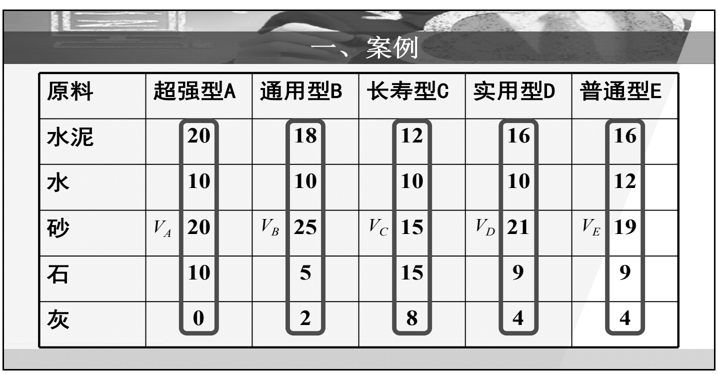
理论知识的讲解以教师辅以电子教案的课堂讲授为主，同时穿插课堂讨论等多种形式的教学方式。在讲授过程中，将数学建模案例融入教学中，帮助学生理解数学概念，推动学生积极思考，充分发挥学生学习的主体作用。

2．教学过程

教学过程：案例引入→提出定义→解决问题→内容小结。

1）案例引入（2 分 39 秒）

（1）案例教学：用一个具体的案例，引发学习兴趣。



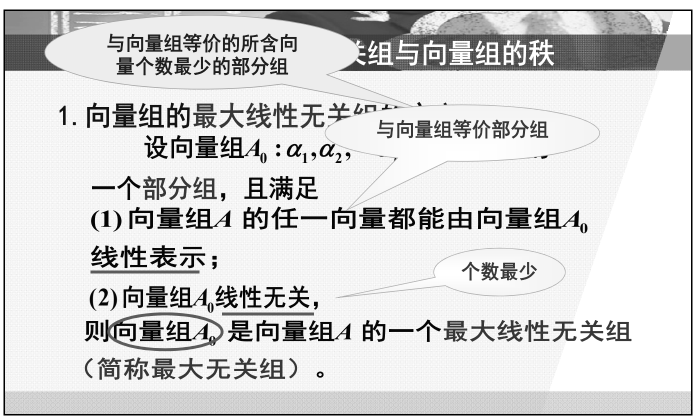
原料	超强型A	通用型B	长寿型C	实用型D	普通型E
水泥	20	18	12	16	16
水	10	10	10	10	12
砂	V_A 20	V_B 25	V_C 15	V_D 21	V_E 19
石	10	5	15	9	9
灰	0	2	8	4	4

帮助企业从这 5 种类型的混凝土中最少选择几种作为企业的产品，使得企业在只生产这几种混凝土的情况下，保证 5 种类型的混凝土都可以从该企业的产品中获得？

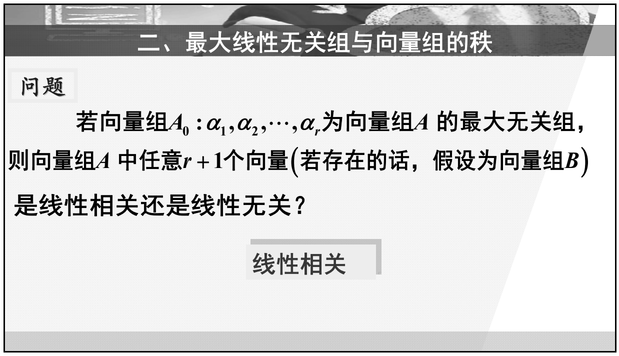
（2）问题驱动，语言转换：将实际问题抽象为数学问题，把帮助企业选择要生产的产品类型的问题转化为求满足某些条件的向量组的问题，提出最大线性无关组的定义。

2）最大线性无关组与向量组的秩（6 分 11 秒）

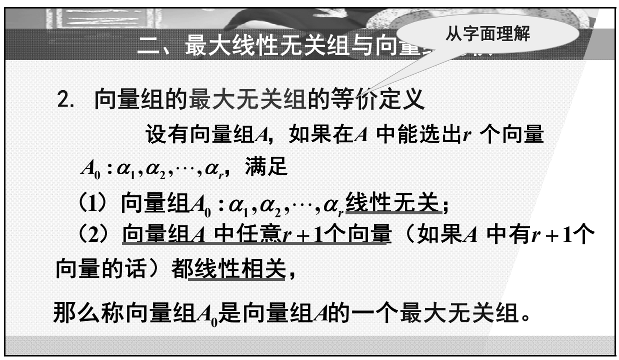
（1）明确定义：重述由案例引出的最大线性无关组的定义，加深对概念的记忆和理解。



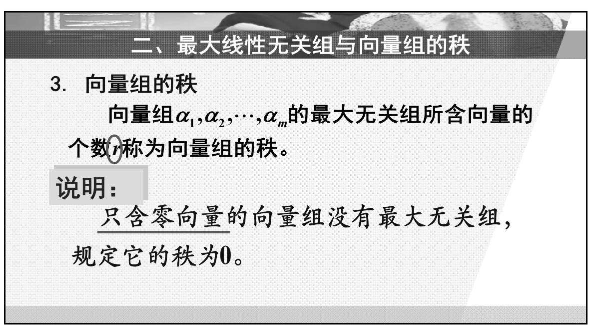
（2）讨论：在明确定义的前提下，通过对问题的讨论，自然引出最大线性无关组的等价定义。



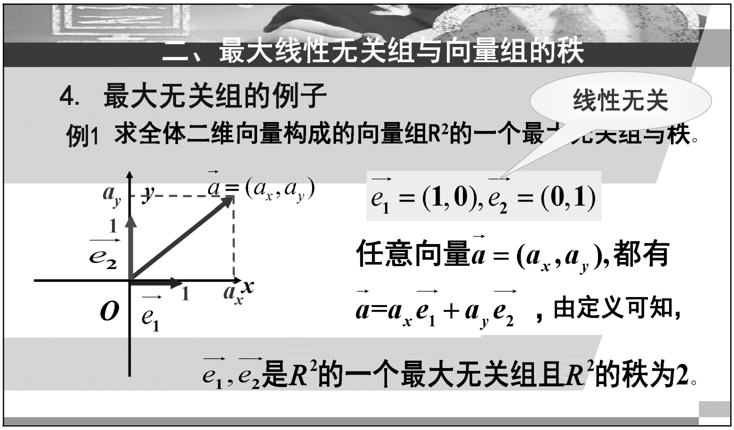
（3）等价定义：多角度诠释定义，并指出两种定义是等价的，展示从不同的方面研究同一个问题。

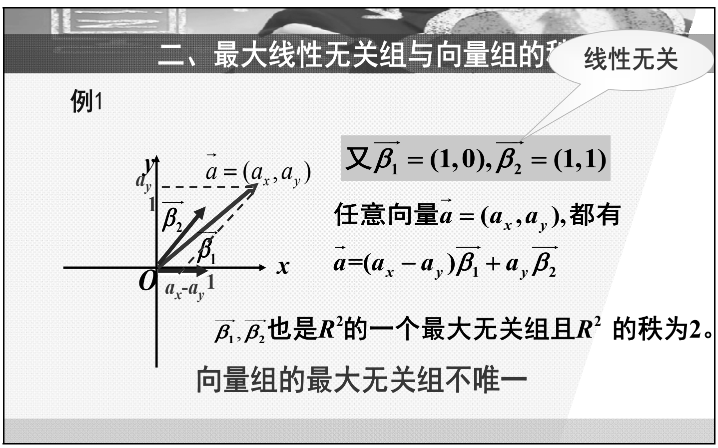


（4）向量组秩的定义：指明秩是向量组的不变量以及零向量组秩的规定。



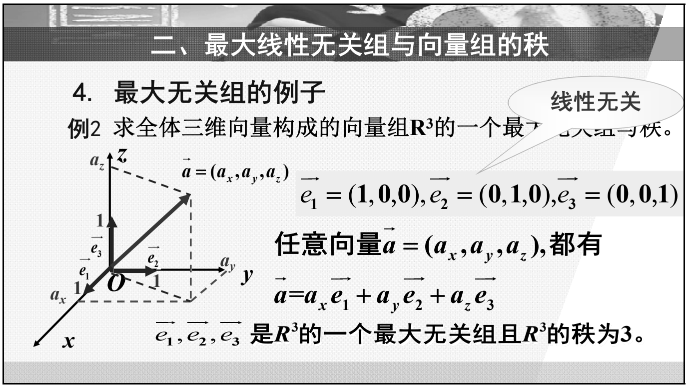
（5）举例说明：通过具体的例子，将抽象的概念具体化。同时借助直角坐标系，展现数形结合的思想。这样，不仅便于理解概念，而且将线性代数和高等数学联系起来。

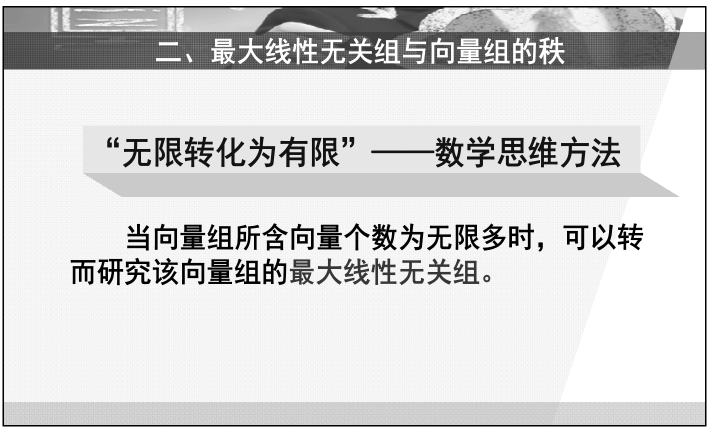




通过实例，使学生理解向量组的最大无关组并不唯一，但是向量组的秩是唯一确定的。

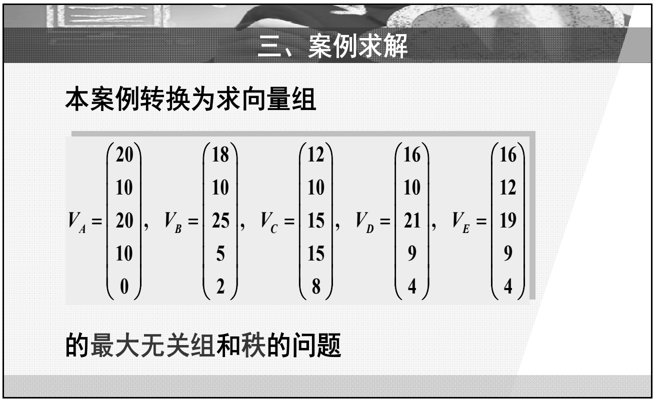
（6）重要数学思维：通过例子体会“无限转化为有限”的重要数学思维方法。



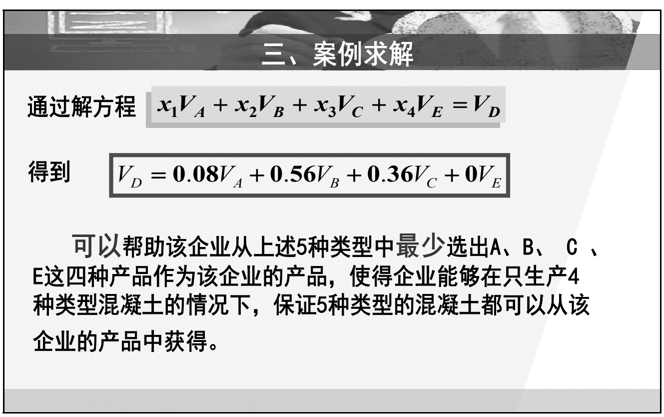


3）案例求解（1 分 45 秒）

（1）案例实质及求解：案例的实质为求最大无关组与秩的问题。利用前面章节学习的知识，把案例求解归结为：将需要讨论的向量组构成矩阵，再通过矩阵的秩和构成矩阵的向量的个数之间的关系判断向量组的线性相关性，进而利用定义求出最大无关组和秩。

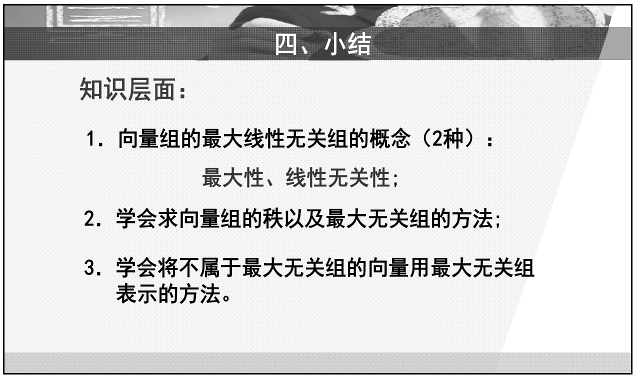


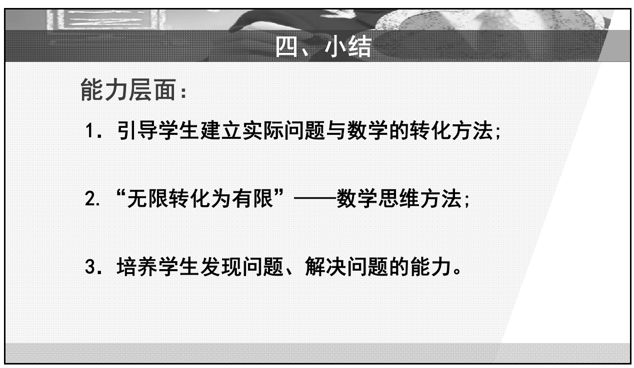
（2）解决问题：引导学生运用已学知识解决问题。



4）内容小结（58 秒）

内容回顾：简要回顾本节内容，让学生对内容有清晰的认识，明确学习要求。





五、教学总结

本节内容从“帮助企业选择生产混凝土的类型”这一案例引出最大线性无关组与向量组的秩的概念，并通过具体例子以数形结合的方式加深对所学概念的理解，然后利用前面已经学过的知识对案例进行分析求解。在教学过程中注重引导学生将实际问题抽象成数学问题，并利用已学知识解决提出的新问题。在讲解的过程中，由浅入深，思路清晰，重点突出。

悬链线及其方程

何　洋

北京科技大学

作品标题：悬链线及其方程

所属课程：高等数学

相关知识点：可降阶微分方程的应用举例

知识点编码：070704

授课对象：理工科本科一年级或二年级学生

授课时长：10 分 51 秒

参考文献：郑连存，等. 高等数学（下册）[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

微分方程在物理学、力学、经济学和管理科学等实际问题中具有广泛的应用。高等数学课程中已经讲授了可降阶的高阶微分方程的求法，但教材上只是给出了可降阶微分方程的形式，然后分析其降阶的方法。如何让学生灵活运用这个知识点解决实际问题，拓展知识面，感受到应用数学建模的理论和方法解决实际问题的魅力，是我们本次课的主要出发点。

二、教学目标

使学生掌握针对悬链线问题进行数学建模与求解的过程，领会如何利用数学工具解决实际问题。

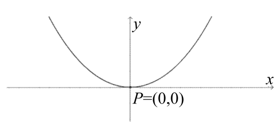
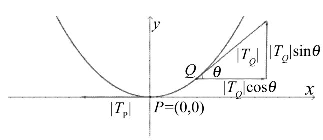
三、教学内容重点难点分析

悬链线问题的数学建模和悬链线方程的性质。

四、教学方法和过程

教学方法为启发式和探究式。

教学过程分问题引入、数学建模、方程求解、解的性质和思考拓展几个环节。

教学环节	教学内容	教学方式
问题的引入	观察发现，美国的圣路易斯大拱门、匈牙利的布达佩斯火车东站房顶、谢菲尔德冬季花园的穹顶横截面均有类似的形状。英国建筑学家虎克指出，一个拱门的最佳形状，翻转过来，正是一条自由悬挂的电缆，即，固定电缆的两端，在重力场中让它自然垂下。这样的电缆的形状被称作悬链线。为了得到悬链线的方程，仅用初等数学知识并不够，需要运用微分方程解决	启发式教学，通过身边的建筑与事物，提出问题
数学建模	（1）假设悬链两端水平，密度均匀。建立如图所示坐标系。  （2）进行受力分析，写出受力平衡关系式。 	通过合理假设，建立坐标系，根据物理知识得出曲线需要满足的数学表达式。 启发：受力平衡关系式中的各个变量可否用函数导数来表示

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>教学方式</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\mathrm{wsg}=|T_Q|\sin\theta \qquad |T_P|=|T_Q|\cos\theta$$

（3）用曲线函数表达关系式中所有的变量。

首先，通过两式相比去掉方程中的 T_Q，得 $\frac{wsg}{|T_P|}=\tan\theta$；

然后，利用切线性质，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\theta$ 去掉方程中的 θ；

最后，利用弧长公式 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ 去掉方程中的 s。

（4）简化关系式，得微分方程初值问题。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{wg}}{|T_P|}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

$$y(0)=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0,y=0}=0$$

</td><td>启发观察得到初始条件</td></tr>
<tr><td>问题求解</td><td>

观察微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{wg}}{|T_P|}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

可发现，方程中不显含因变量，因此这是可降阶的二阶微分方程。

为求解不显含因变量的二阶微分方程，可以通过引入新变量 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，将原问题转化为求解两个一阶常微分方程问题。具体过程如下图所示：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\xrightarrow[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0,y=0}=0]{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2},p(0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2},p(0)=0\xrightarrow{\text{积分}}p=\tan\frac{x}{a}$$

$$p=\tan\frac{x}{a}\xrightarrow[p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]{y(0)=0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{x}{a},y(0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{x}{a},y(0)=0\xrightarrow{\text{积分}}y=a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)-1\right),\ \cosh(t)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}}{2},$$

得到的解的形式为

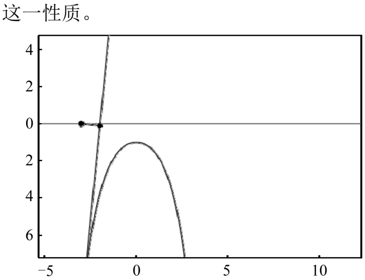
$$y=a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)-1\right),$$

其中 $\cosh(t)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}}{2}$ 为双曲余弦函数

</td><td>通过观察，继续探究求解该微分方程初值问题的方法。

利用流程图，给出求解不显含因变量的二阶微分方程的求法</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>教学方式</th></tr>
<tr><td>解的性质</td><td>分析解的性质如下。
1．观察曲线形状
由解的图象，发现曲线形状与悬链线参数 $a=\frac{|T_P|}{wg}$ 之间的关系。即，a 越大，曲线两端点的距离越远。
2．分析悬链线方程与抛物线方程之间的区别
（1）通过函数表达式来看，悬链线方程是超越函数，抛物线方程是代数函数，两者在难度和深度上差异非常大。
（2）通过函数图象看，考虑同样深度与延展距离的悬链线与抛物线，它们之间的差距随深度的增加显著增大。
综上，悬链线与抛物线有显著差别。
3．分析悬链线的力学性质
悬链线各载面的弯矩均为零，因此横截面为悬链线的穹顶会更加坚固。比如匈牙利的布达佩斯火车站。
4．分析悬链线的骑轮线
令一条直线沿着倒转的悬链线缓慢地滚动，可得直线上固定一点的轨迹为一条水平直线 $z(t)=(t,-1)$。如下图象表现了这一性质。


这一性质可用于设计适合多边形车轮平稳前进的道路。即通过将多个悬链线按一定方式连接，可允许多边形车轮平稳运行，车轮重心始终在一条水平线上</td><td>利用函数图象，启发探讨解的性质。

利用函数分析和图象观察探究悬链线的旋轮线。启发思考同学们可能的应用。

利用动图，给出悬链线性质的应用</td></tr>
<tr><td>思考拓展</td><td>学习了悬链线方程的推导与性质后，思考以下问题：
（1）悬链线方程中的双曲余弦函数与余弦函数有什么区别？
（2）当悬挂的铁链下方受均匀的支撑力时，曲线方程是什么</td><td>进一步分析函数性质。
在本节课内容的启发下，建模并求解类似的应用问题</td></tr>
</table>

闭区间连续函数的零点存在定理

闫　浩

北京邮电大学

作 品 标 题：闭区间连续函数的零点存在定理

所 属 课 程：高等数学

相关知识点：零点存在定理

知识点编码：011502

授 课 对 象：理工科本科一年级学生

授 课 时 长：14 分 07 秒

参 考 文 献：[1] 同济大学数学系．高等教学[M]．北京：高等教育出版社，2014.

[2] 马知恩．工科数学分析基础[M]．北京：高等教育出版社，2006.

一、教学背景

高等数学课程的特点是概念繁多，入门时理论性强，在历年的教学中，学生对闭区间连续函数的性质理解不到位，即不理解定理证明的过程。这样会使学生运用时不自如，不能得心应手。闭区间连续函数的零点存在定理十分重要，本节课的教学内容包括闭区间连续函数零点存在定理的引入、证明、应用。首先我们直接从方程的根的角度引出零点存在定理，然后证明零点存在定理并举例（数学范例与实际问题范例），定

理的证明过程是本节课教学的难点，定理的应用与其中蕴含的数学思想是教学过程的重点。

二、教学目标

1．知识层面

（1）理解并掌握零点存在定理的证明过程与二分法求根的思想。

（2）认清等式的本质，学会构造辅助函数。

2．能力层面

通过闭区间连续函数的零点存在定理的学习，能够使同学们体会到闭区间连续函数的零点存在定理有着广泛的应用，使同学们体会其中所蕴含的数学思想。同时希望学生利用定理解决简单的实际问题。

3．认知层面

（1）认识到数学的双重逻辑结构，一方面是演绎科学，另一方面也来源于实际问题的研究。

（2）让学生不断认识到应该努力朝着“在研究中学习，在学习中思考，在思考中领悟，在领悟中完成学业”的目标努力。

三、教学内容及重点难点分析

本节课为概念教学课型，教学重点是：闭区间连续函数的零点存在定理所蕴含的数学思想。处理方法如下。

（1）重点讲解，通过归纳演绎证明定理。

（2）启发式教学，通过设问的方式启发学生主动思考。

本节课的教学难点是：闭区间连续函数零点存在定理的证明过程与定理的应用。处理方法如下。

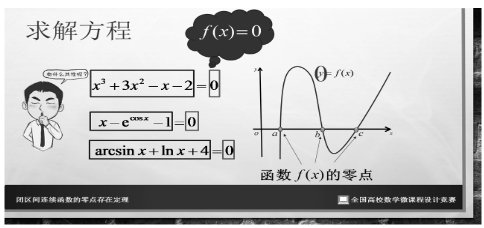
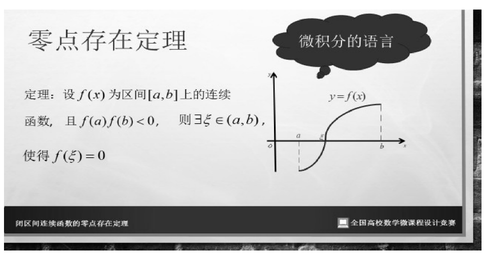
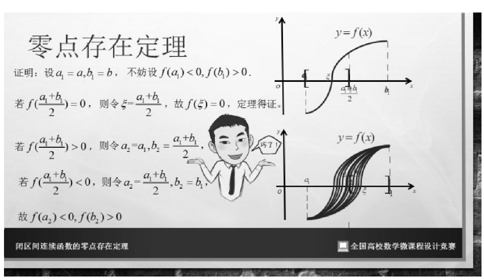
（1）采用二分法等直观方法引导学生思考。

（2）通过建立数学模型，学会利用数学语言描述实际问题，从而解决实际问题。

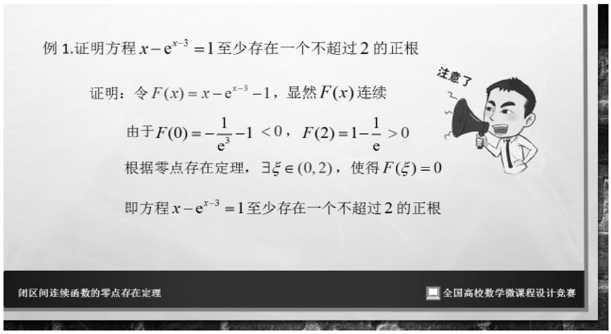
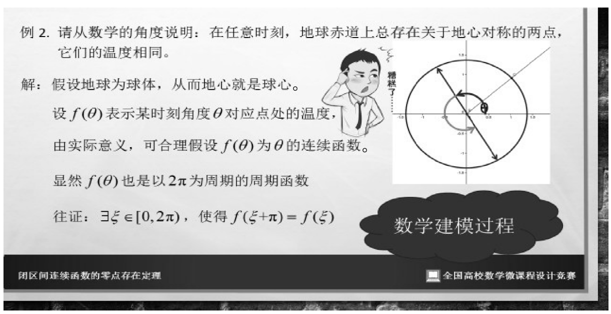
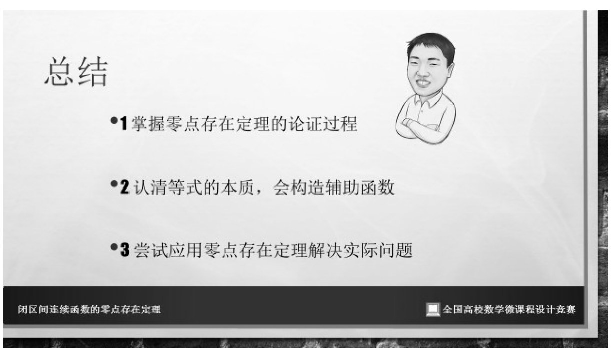
四、教学方法和过程

（1）采用动画等方式演示定理证明过程，让抽象的定理证明变得直观、生动。

（2）与实际相结合，通过对实际问题建立数学模型，利用闭区间连续函数的性质解决数学模型，来说明其应用的广泛性。

教学内容	教学设计	时间分配
1.引入：方程的根就是函数的零点		1 分 23 秒
2. 零点存在定理的叙述		1 分 7 秒
3. 零点存在定理的证明与其意义		5 分 30 秒

续表

教学内容	教学设计	时间分配
4．例题 1（数学范例）		1 分 50 秒
5.例题 2（实际范例）		3 分 37 秒
6.本节课总结		40 秒

五、教学总结

闭区间连续函数的性质应用广泛，在本节课中我们重点讲解了零点存在定理，我们希望同学们能够掌握这些定理的思想，并能够熟练运用，同时掌握数学语言的使用，在本节课中重点使用了连续函数的语言与极限的语言，教师力图在讲解过程中突出重点，讲清难点，将数学思维渗透给学生。

罗尔定理的证明

郭晓玲
中国矿业大学

作 品 标 题：罗尔定理的证明
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：微分中值定理
知识点编码：030102
授 课 对 象：工科本科一年级学生
授 课 时 长：12 分钟
参 考 文 献：同济大学数学系. 高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

一、教学背景

学生已经掌握了极限、导数和微分的知识，在第三章将应用这些知识研究函数的性质和曲线的性态，并解决一些实际问题，因此需要建立函数和导函数之间的联系。微分中值定理是建立函数及其导数关系的重要桥梁，本节课讲授的罗尔定理是微分学中基本的定理也是最重要的定理之一，深刻理解其条件和结论是理论层面的基本要求，同时在应用过程中也十分重要。罗尔定理的结论和证明过程对于拉格朗日中值定理以及柯西中值定理的证明中构造辅助函数具有指导作用。因此本节课内容承上启下，具有十分重要的意义。

二、教学目标

（1）深刻理解罗尔定理的条件与结论。

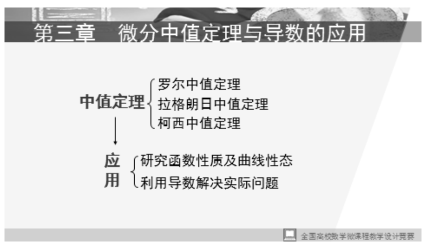
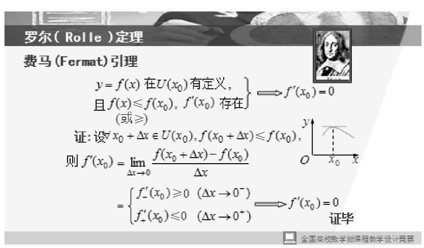
（2）掌握费马引理和罗尔定理的证明过程。

三、教学内容

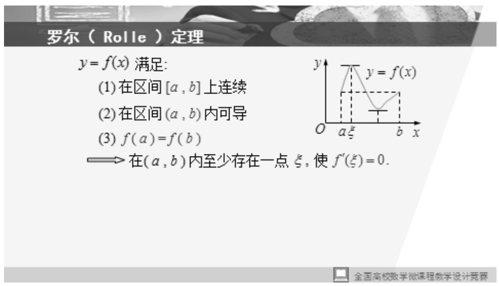
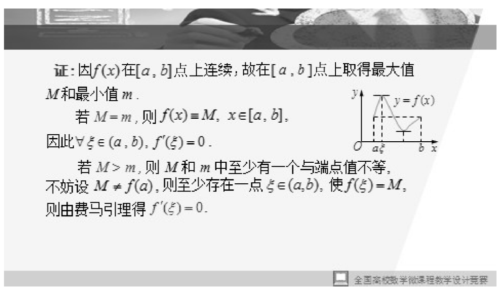
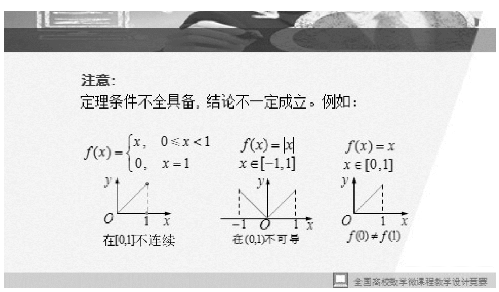
罗尔定理的条件与结论。

四、教学方法和过程

课件讲授为主，辅以动画效果，引导学生跟随教师思路思考问题。具体的教学设计如下。

<table>
<tr><th>教学进程</th><th>教学内容</th><th>时间/分钟</th></tr>
<tr><td>引言</td><td>从导数的概念出发，指出需要借助新的工具建立函数与其导数之间的联系，引出本节课的主要内容：罗尔定理。

</td><td>1</td></tr>
<tr><td>费马引理的内容及证明</td><td>介绍费马引理的主要内容及证明过程，强调费马引理的几何意义及其局部特性，引出罗尔定理对函数在区间整体性质的思考。

</td><td>4</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr>
<td>罗尔定理的条件、结论和几何直观</td>
<td>从图形出发，通过观察和直观的形式帮助学生更好地掌握定理的条件和结论，引出罗尔定理的证明。

</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>罗尔定理的证明</td>
<td>给出罗尔定理的严格证明，在证明过程中再次加深对条件的理解。

</td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td>罗尔定理条件的理解</td>
<td>通过三个反例加深对罗尔定理三个条件必要性的理解，并总结本节课的重点内容，以及下节课的主要内容。

</td>
<td>2</td>
</tr>
</table>

五、教学总结

罗尔定理的条件在证明过程中不可缺少，同时也是应用罗尔定理的前提。课堂上通过对不满足三个条件的实例的讲解，加深学生对于罗尔定理条件的理解。通过费马引理、罗尔定理的证明过程加强学生的推理证明能力的训练，并且通过费马引理到罗尔定理的发展过程帮助学生了解研究的一般思路。

函数最值的应用实例

廖　苏

北京体育大学

作 品 标 题：函数最值的应用实例
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：函数最值的应用实例
知识点编码：030902
授 课 对 象：体育院校学科类学生
授 课 时 长：10 分钟
参 考 文 献：陆爱云. 运动生物力学[M]. 北京：人民体育出版社，2010.

一、教学背景

学生为体育院校学科类学生（全国统考生），有一定的数理基础，但也需要对体育有所了解。要求通过前一章的学习已经对函数的极值及其求法、函数最大值与最小值的求解有基本掌握。

二、教学目标

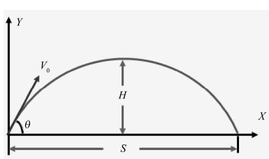
在掌握了最值问题的求解方法的基础上，理解并应用在体育运动实例中。

三、教学内容及重点

教学重点：体育中的最值问题。
教学难点：如何确定体育实例中的最值。

四、教学方法和过程

实例讲授，引导思考，借用多媒体教学，图片、视频、动画和板书相结合。

教学过程			
教学步骤	教学内容	教学意图（实现方法）	时间/分钟
1	体育中的最值问题： 跳马、平衡木、跳水、跳远都需要的高度和远度； 跳马、跳高和跳水的成功与失败动作，以及由于动作失误造成损伤的动作	简单介绍体育中最值相关问题（使用图片、视频和动画展示）	2
2	最大值应用实例： 跳远最大远度问题，回答“怎样起跳才可以获得最大的水平距离？”的问题； 将跳远远度的问题数学化，变成求抛物线开口最大的问题。注意忽略空气阻力  $Y=V_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$；$H=\frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$ $X=V_0\cos\theta\cdot t$；$S=\frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$ 投掷最大远度问题，涉及出手的高度、角度和速度； 撑杆跳、跳水、跳马等项目最大腾空高度也可计算获得	理解体育运动中最大值的作用和意义，会利用公式计算（示意图，板书公式及计算）	4

续表

教学过程			
教学步骤	教学内容	教学意图（实现方法）	时间/分钟
3	最小值应用实例： 帆船逆风而行的航时最短问题； 帆船逆风而行原理（配视频解说）； 帆船“之”字形前行：分力越大，则速度越快，但绕行距离长；绕行距离短，但速度会慢，因为分力小	理解帆船逆风而行的原理，会分析航行时长的影响因素（对图和视频进行解说）	3
4	小结：体育运动中也有最值问题：跳高运动中背越式与跨越式的对比； 但人是生命体，人体重心随动作姿势移出体外时，身体最高点位置改变；跳远落点可在身体重心之前，增大测量距离	强调人的特殊性，理解数理原理和规律在人体运动中使用的局限性	1

五、教学总结

体育院校数学课程的开设门类较少，对学生的要求也不如理工、文科或综合性院校，但如果能将数学跟体育相结合，让学生有更多的机会去应用所学知识，或许可以更好地激发学生学习与思考的兴趣。

线性相关、线性无关的概念

余爱梅
北京交通大学

作 品 标 题：线性相关、线性无关的概念
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：线性相关、线性无关的概念
知识点编码：040201
授 课 对 象：工科本科一年级学生
授 课 时 长：15 分钟
参 考 文 献：

[1] 李尚志. 线性代数（数学专业用） [M]. 北京：高等教育出版社，2006.
[2] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社, 2007.

一、教学背景

解线性方程组是线性代数的核心问题。前面已经讨论过如何解线性方程组。那么，线性方程组解集的大小与线性方程组所含方程的个数之间有什么关系？线性方程组所含方程的个数越多，线性方程组的解集越小吗？从这个问题入手，通过一个具体的例子，引出向量组的线性相关、线性无关的概念。

二、教学目标

（1）理解向量组线性相关、线性无关的定义。
（2）会判定向量组的线性相关性。

三、教学内容及重点难点分析

教学内容：向量组线性相关、线性无关的概念；向量组的线性相关性的判定。

重点：理解向量组线性相关、线性无关的定义，会判定向量组的线性相关性。

难点：理解向量组线性相关、线性无关的定义。

四、教学过程

1．线性相关、线性无关的定义	
1）引入	
问题：线性方程组解集的大小与线性方程组所含方程的个数之间有什么关系？线性方程组所含方程的个数越多，线性方程组的解集越小吗？ 线性方程组 $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x+2y+6z=0 \end{cases} \qquad (1)$$ 中的第 3 个方程可由第 1 个方程和第 2 个方程相加得到，因此该线性方程组与线性方程组 $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases} \qquad (2)$$ 同解。这说明在线性方程组（1）中，第 3 个方程是多余的，因为并不是方程个数越多，线性方程组的解集越小。如果我们要研究线性方程组的解集的大小与线性方程组所含方程的个数之间的关系，就应该将方程组中那些能表示成其他方程的线性组合的方程删去, 直到任意一个方程都不是其余方程的线性组合。 线性方程组（1）可用矩阵表示为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。若其系数矩阵的第 i	提问，启发学生思考，引出向量组线性相关性的定义

续表

行记为α_i，则“线性方程组（1）中第 3 个方程可由第 1 个方程和第 2 个方程相加得到”可用向量的语言表述为“$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$”。 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中有一个向量能由其余的向量线性表出，这样的向量组我们称为线性相关	
2）定义	
给定 n 维向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$，若$\boldsymbol{A}$中至少有一个向量能由其余 m−1 个向量线性表示，则称向量组$\boldsymbol{A}$是线性相关的，否则称它线性无关	
3）注意 （1）向量组线性无关$\Leftrightarrow$向量组中任意的向量都不能由其余的向量线性表出。 （2）规定：只包含一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组线性相关$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=0$。 （3）两个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关$\Leftrightarrow$存在数 k 使$\boldsymbol{\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_2$或$\boldsymbol{\alpha}_2=k\boldsymbol{\alpha}_1$。 特殊地，2 个 2 维（3 维）向量线性相关$\Leftrightarrow$两个向量共线	
2．向量组线性相关性的判定	
用定义判断含有两个向量的向量组的线性相关性比较容易，但是要判断含有 3 个以上向量的向量组的线性相关性比较困难。通过分析，给出与向量组线性相关等价的命题	
定理 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$\Leftrightarrow$存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$。 注意：$m=1$时定理中的结论仍然成立	启发学生由定义证明该命题
例 证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是线性无关的。 **证** 考察$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即 $$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1\cdot1+k_2\cdot1+k_3\cdot1=0\\k_1\cdot0+k_2\cdot1+k_3\cdot1=0\\k_1\cdot0+k_2\cdot0+k_3\cdot1=0\end{cases}$$ $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。由$\lvert(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\rvert\neq0$，得 $k_1=k_2=k_3=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。 **注意** 3 个 3 维向量线性相关$\Leftrightarrow$3 个向量共面	引导学生将证明向量组的线性无关转化成证明一个齐次线性方程组只有零解
提问：m 个 n 维向量如何判断其线性相关性？引导学生得出结论。 **定理** 设 n 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=0$有非零解	

续表

3．小结 本节课刚开始给出的线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x+2y+6z=0 \end{cases}$ 说明，一般地，齐次线性方程组的解集的大小与线性方程组所含方程个数没有直接关系，但是与其系数矩阵行向量组中线性无关的向量的个数有关，具体的关系在本章的最后一节讨论	
4．作业	
5．教学反馈	

线性蛛网模型

常广平
北京联合大学

作品标题：线性蛛网模型
所属课程：大学数学应用案例
相关知识点：差分方程模型
授课对象：本科生
授课时长：16 分钟
参考文献：[1] 姜启源，谢金星，等. 数学模型[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2003.
[2] 叶其孝，姜启源，等，译. 数学建模[M]. 北京：机械工业出版社，2005.
[3] 陈理荣. 数学建模导论[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2002.

一、教学背景

蛛网模型是动态经济分析中的经典模型，运用弹性原理解释某些生产周期较长的商品在失去均衡时发生的不同波动情况。蛛网模型应用范围广泛，在经济、生物、医学、物理、工程技术等许多方面有重要的应用。蛛网模型属于差分方程模型的一种。差分方程模型属于确定性离散模型。动态连续模型用微分方程方法建立，当时间离散化以后，可以用

差分方程建立动态离散模型。对于具体的问题采用连续方法还是离散方法建立模型应依据建模目的而定。

二、教学目标

通过案例教学使学生理解蛛网模型的概念，掌握应用蛛网模型解决实际问题的步骤，了解蛛网模型在实际问题中的应用，从而培养学生分析问题中的数量关系、建立数学模型，应用模型结论解决实际问题的能力。

三、教学内容及重点难点分析

1. 教学内容

（1）案例分析。
（2）建立线性蛛网模型，用迭代法求解。
（3）解决问题与应用。
（4）引申与探究。

2. 重点

教学重点：分析问题中的数量关系，建立模型的方法。

解决方案：在教学中逐步引导学生体验分析案例，抽象出其中的数量关系，建立模型的过程。

3. 难点

教学难点：对模型结果的分析与应用。

解决方案：在教学中引导学生分析讨论模型结果，并将模型结果应用到实际案例当中。

四、教学方法和过程

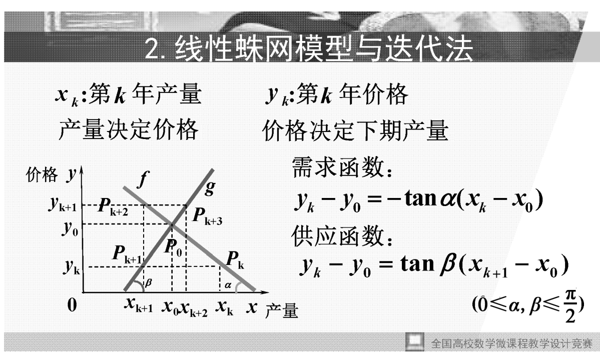
1．案例分析（1 分 30 秒）

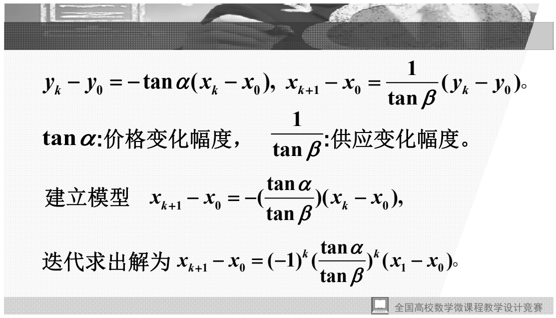
通过目前农产品“蒜薹”的价格暴涨暴跌的案例，引出问题：商品的产量和价格何时会趋向稳定？指出需要分析商品产量和价格之间的关系，建立数学模型来研究。

某产地	2016年	2017年	同比
收购价(元/斤)	1.8	0.4	-77%
产量(万吨)	20	32	+60%
种植面积(万亩)	40	60	+50%

2．建立模型（3 分钟）

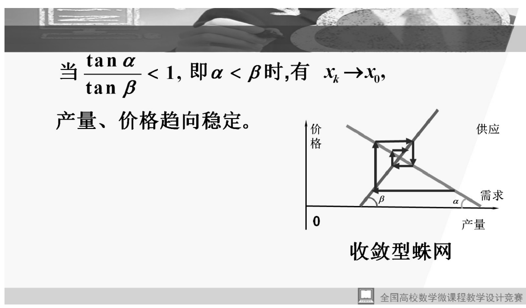
将案例中的时间离散化，根据商品产量与价格间的关系，建立需求函数与供应函数的方程，整理得到关于产量的一阶线性差分方程，这就是产量与价格的综合模型。

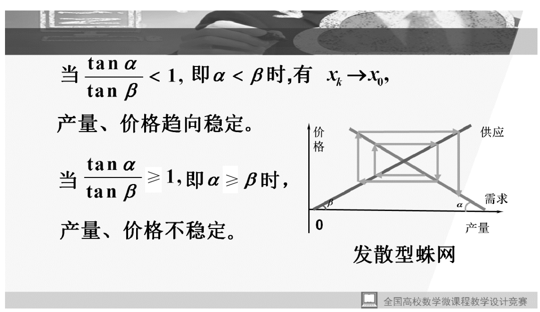




3．结果分析（4 分 30 秒）

用迭代法求解方程，对结果进行分析讨论，得出产量与价格趋于稳定的条件。绘制不同情况下产量与价格变动的趋势图，讲解蛛网模型得名的原因。

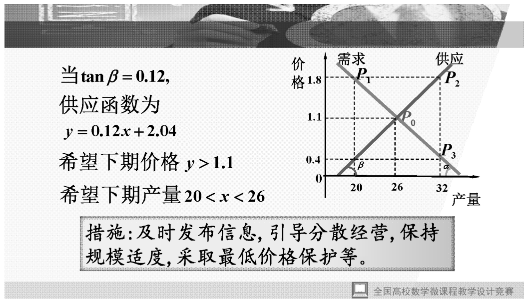




4．问题解决与应用（2 分 30 秒）

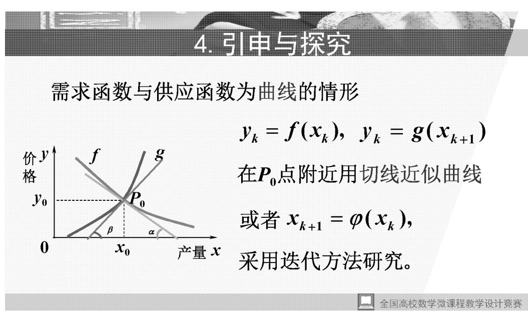
将模型与结果应用到案例中，分析案例中问题的解决办法，给出合

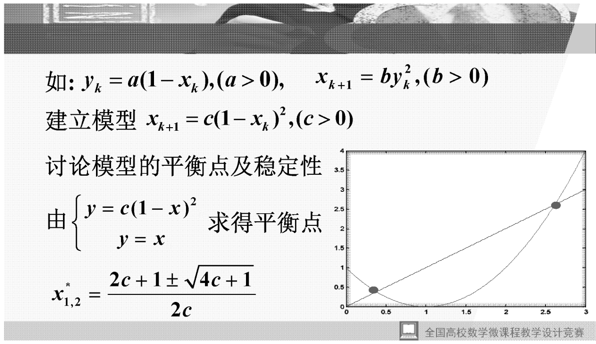
理化建议。将我们的建议与案例中专家给出的建议做对比，两者基本吻合，说明我们分析思路与解决方法是合理的。



5．引申与探究（4 分 10 秒）

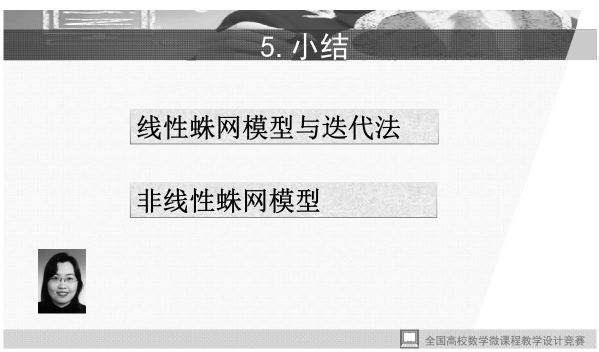
前面重点讲解线性模型，在此基础上做一简单引申，考虑非线性模型。商品价格与产量的稳定性问题对非线性模型而言，就是研究它的平衡点的稳定性问题，我们可以借助前面线性模型的结论解决这一问题。进一步指出蛛网模型在实际中有很重要的应用。





6．小结（30 秒）

回顾这节课讲述的内容，再次强调重点内容。



五、教学总结

本讲的教学目的包含两个方面。一方面通过案例教学使学生理解蛛网模型的概念，掌握应用蛛网模型解决实际问题的步骤，了解蛛网模型在实际中的应用。另一方面通过建模教学过程培养学生分析问题中的数量关系，建立数学模型，将模型结论应用于实际问题当中，从而的提升解决问题的能力。

在教学设计中，从教学目的出发，涉及案例分析、模型建立、结果应用、引申探究等环节，这一教学过程与建模活动的过程相符。引导学生在这一过程中逐步熟悉建模方法，并掌握基本数学模型的特征。

初等矩阵的定义

叶　飞
首都经济贸易大学

作 品 标 题：初等矩阵的定义
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：初等矩阵的定义
知识点编码：030201
授 课 对 象：本科二年级学生
授 课 时 长：15 分钟
参 考 文 献：[1] 吴赣昌. 线性代数（经管类）[M]. 北京：中国人民大学出版社，2011.
[2] Vanessa Paschoa Ferraz. Reindeer Linear Transformation. http://demonstrations.wolfram.com/ReindeerLinearTransformation/. Wolfram Demonstrations Project, 2014.

一、教学背景

矩阵的初等行变换在用 Gauss 消元法解线性方程组时就被引入了，在解矩阵方程和矩阵求逆运算时也曾大显身手，但我们对它的理解暂时还停留在“对矩阵行的操作”这一技术层面。在本课中我们将首先认识到，初等行变换的本质是一种线性变换，然后将用五个步骤推导出其矩

阵表示，也就是初等矩阵的定义。这些工作将为我们后续的学习打下坚实基础。

二、教学目标

（1）理解三种初等行变换的本质是对矩阵的三类线性变换。

（2）了解三种初等行变换各自的几何直观是什么。

（3）理解作为初等行变换的矩阵表示——初等矩阵是如何被推导出来的。

（4）掌握初等矩阵的定义。

三、教学内容及重点难点分析

1．教学内容

（1）发现初等行变换的线性性质。

（2）给出初等行变换的几何直观。

（3）推导初等行变换的矩阵表示。

（4）初等矩阵的定义。

2．教学重点

（1）发现初等行变换的线性性质。

（2）初等矩阵的定义。

3．教学难点

推导初等行变换的矩阵表示。

四、教学方法和过程

1．复习三种初等行变换

2. 对每一种初等行变换

（1）简化问题：将矩阵简化为二维列向量，并选择一个具体的变换。

（2）发现线性：发现此变换的可加性和比例性，也就是线性性质。

（3）几何直观：利用 Wolfram 的代码资源，以平面上的小鹿为例，给出变换的几何直观。

（4）矩阵表示：推导此变换的矩阵表示（会使用到手写板及 OneNote 软件）。

（5）推广结论：对一般的矩阵和初等行变换，给出初等矩阵的一般定义。

五、教学总结

初等变换处处逢，只知其技不识容，庖丁解牛需五步，矩阵表示水蓉。

t 分布与 F 分布

张赛茵

首都经济贸易大学

作 品 标 题：t 分布与 F 分布

所 属 课 程：概率论与数理统计

相关知识点：t 分布与 F 分布

知识点编码：050103

授 课 对 象：本科二年级学生

授 课 时 长：12 分 30 秒

参 考 文 献：[1] 盛骤. 概率论与数理统计[M].3 版. 北京：高等教育出版社, 2001.

[2] 张忠占, 谢田法, 杨振海. 应用数理统计[M]. 北京：高等教育出版社, 2011.

[3] 张润楚. 数理统计学[M]. 北京：科学出版社, 2010.

[4] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 长沙：湖南教育出版社, 2002.

一、教学背景

在使用统计量进行统计推断时常需要知道它的分布，当总体的分布函数已知时，抽样分布是确定的。然而一般来说，要求出统计量的精确分布是困难的。本节介绍了两个来自正态分布的抽样分布：t 分布与 F 分

布。

二、教学目标

掌握 t 分布与 F 分布的构造性定义并熟悉一些重要结论。

三、教学内容及重点难点分析

本节主要讲授了 t 分布与 F 分布的背景、定义、密度函数、密度函数图形的轮廓、分位点及分位点的性质；t 分布与正态分布的区别与联系；t 分布与 F 分布的关系等内容。

其中，t 分布与 F 分布的构造性定义及其性质是重点。两个分布的分位点性质是难点。

四、教学方法与过程

启发式讲授，图文结合加深对 t 分布与 F 分布的印象。

五、教学总结

为了研究来自正态总体的几个统计量的分布，本节学习了 t 分布与 F 分布。主要研究了它们的构造性定义、概率密度形式及其形状特征，从而分析出这两个分布的性质；介绍了 t 分布与 F 分布分位点的定义及性质，这部分比较难理解；研究了正态分布与 t 分布的区别和联系，t 分布与 F 分布的关系，为下一步学习几个常用统计量的分布以及数理统计部分的假设检验奠定了基础。

正态分布

冯　杰
中央民族大学

作 品 标 题：正态分布
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：正态分布
知识点编码：020303
授 课 对 象：本科二年级学生
授 课 时 长：19 分 57 秒
参 考 文 献：范大茵，陈永华．概率论与数理统计 [M].2 版．杭州：浙江大学出版社，2003.

一、教学背景

正态分布是概率论与数理统计中最常用也是最重要的一种连续型随机变量的分布，它在数学、物理及工程等领域都有非常重要的应用，在统计学的许多方面有着重大的影响力。

二、教学目标

（1）学生借助高尔顿钉板试验，认识正态分布曲线及其所表示的意义；
（2）掌握正态分布的定义及正态分布曲线的特征；

（3）理解并掌握正态分布概率的计算。

三、教学内容及重点难点分析

教学重点和难点：正态分布曲线的发现和正态分布概率的计算。

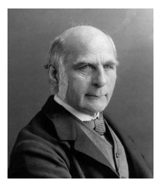
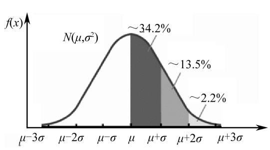
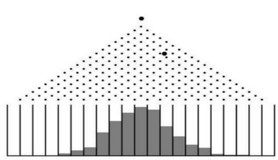
四、教学方法和过程

教学方法：启发式和探究式。

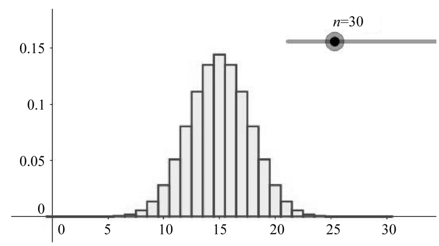
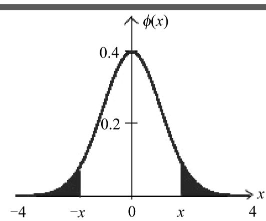
教学过程：

问题引入 → 问题探讨 → 给出定义 → 特征分析 → 应用拓展

具体教学流程设计如下。

教师调控	教学内容	教学意图
引用生物统计学家高尔顿的原话介绍正态分布的重要性	“我几乎不曾见过像误差呈正态分布这么美妙而激发人们无穷想象的宇宙秩序。” “如果古希腊人知道这条曲线，想必会给予人格化乃至神格化。”  高尔顿（Galton）	通过名人名言吸引学生的注意，引发学生对于本节课的好奇心
介绍正态分布在自然界与人类社会普遍存在	 √ 人群每个个体的身高； √ 测量值与实际值的误差； √ 大气中污染物的浓度； √ 年降雨量问题； √ ……	通过生活中的实例激发学生对本节课学习的兴趣
问题引入，通过分析高尔顿钉板试验从直观上认识正态分布曲线		通过动画演示效果使学生从直观上认识正态分布所体现出来的统计规律

续表

教师调控	教学内容	教学意图
		
给出正态分布的定义并介绍正态分布的发现历史	若连续型随机变量X的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，$-\infty<x<\infty$， 其中$\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数，则称X服从参数为μ,σ的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	由直观认识到理论上的抽象总结
介绍正态分布曲线的五个特征	（1）关于直线x=μ对称并在x=μ处取得最大值； （2）$x\to\infty$时曲线以x轴为渐近线； （3）曲线在x=μ+σ处有拐点； （4）固定σ，改变μ，则图形沿x轴平移而不改变其形状； （5）固定μ，改变σ，则σ越小，图形越高越瘦；σ越大，图形越矮越胖	结合图形讲解正态分布曲线的特征，加深学生对正态分布的印象
介绍正态分布概率的计算方法：先转化为标准正态分布，然后进行查表计算	定理：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。 $X\sim N(0,1), P\lbrace X\leqslant x\rbrace=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x)$ 教材书末附有标准正态分布表，给出了 $x\gt 0$时$\Phi(x)$的值。 $\boxed{x\lt 0,\ \Phi(x)=\,?}$  $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$	采用启发式和探究式教学，提出问题、分析问题、解决问题，环环相扣，使学生掌握正态分布概率的计算方法

续表

教师调控	教学内容	教学意图
给出典型例题，分析题意，列出概率表达式并进行变量标准化，最后查表计算	例：设某地区成年男性身高(cm) $X\sim N(170,7.69^2)$，随机观察一男子，求其身高超过 175cm 的概率。 解：$P(x>175)=P(\frac{x-170}{7.69}>\frac{175-170}{7.69})$ $=P(z>0.65)$ $=1-\Phi(0.65)$ $=0.2578$	通过例题让学生掌握如何根据实际问题的条件来求解概率
实际生活中会出现上述例题的逆过程的现象，将例题延伸，给出生活中登公交车的一个实际问题，与上述例题紧密结合，前后呼应	例（续）：城市公交车门高度设计中，受结构限制不能太高，但为了保证 95%的男人都能顺利登车，应保证车门的高度不低于多少？ 解：假设车门高度不低于 h， $0.95=P(x<h)=P(\frac{x-170}{7.69}<\frac{h-170}{7.69})$ $=P(z<\frac{h-170}{7.69})$ $=\Phi(\frac{h-170}{7.69})$ 查表得 $\Phi(1.65)=0.9505 \Rightarrow \frac{h-170}{7.69}=1.65$。 $\therefore h=182.69(\text{cm})$	通过例题的延伸，让学生体会到上述例题的逆过程的概率计算，加深对正态分布的理解
讲完所有的知识点后，补充介绍工程上采用的 3σ 法则，解释为什么正态变量的取值在 $\mu\pm3\sigma$ 之间	注： 工程上采用的 3σ 法则：认为正态变量的取值在 $\mu\pm3\sigma$ 之间。 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， 则 $P(\lvert X-\mu\rvert\leqslant3\sigma)=0.9974$。 3σ 法则常用于产品质量控制	通过介绍 3σ 法则，使学生看到正态分布在工程上的重要作用，体会到数学的神奇，提高学习兴趣
收拢知识，总结整节课的主要内容	小结 1. 正态分布的概率密度： $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$ 2. 正态分布曲线的特征； 3. 正态分布概率的计算； $X\sim N(\mu,\sigma^2)$； $P(x_1<X\leqslant x_2)=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$	回顾整节课的主要内容，帮助学生巩固本节课的重要知识点

五、教学总结

正态分布是概率论与数理统计中最常用也是最重要的一种连续型随机变量的分布，学生在之前的学习中已经研究了连续型随机变量及其密度函数的定义、性质。教材中本节课一上来就给出了密度分布函数，学生就不明白数学家当年是怎么找到这个概率分布曲线的。为了让学生首先从直观上认识正态分布曲线，我选择高尔顿钉板试验为切入点，通过分析小球落入球槽的概率画出频率分布直方图，并设计了一段动画演示随着n的增大，频率分布直方图会发生怎样的变化。在学生对正态分布曲线有了一个直观认识的基础上，介绍正态分布的定义，并通过图形分析曲线特征。最后通过实际问题的概率计算，让学生掌握一般正态分布和标准正态分布之间的转换，学会计算一些生产生活中的实际问题的概率。本节课采用启发式和探究式教学，提出问题、分析问题、解决问题，环环相扣，演示生动，帮助学生深刻理解并掌握正态分布，为之后的统计理论的学习打下坚实的基础。

从概率的角度探讨美国大选结果
——二项分布的应用

孙　妍

北京信息科技大学

作品标题：从概率的角度探讨美国大选结果——二项分布的应用

一、教学背景

概率知识实际上存在于我们生活中的方方面面，无论是经济、金融还是人文、政治。我们可以使用概率的理论解释社会中的很多问题，本案例只是这种应用中的非常粗浅的一种。

二、教学目标

通过一个发生在我们身边的热点问题，引起学生学习概率知识的兴趣。并且通过这个案例的学习，使学生理解二项分布的定义，掌握该类型随机事件求解的方法。

三、教学方法

主要通过 PPT 进行讲授。

四、教学内容

2016 年 11 月 8 日，美国大选落下帷幕，特朗普击败了希拉里，当选了美国总统。我们一起来用概率的知识粗浅地分析一下这个结果。在回答这个问题之前，我们首先来了解一下美国选举中的一个规则——选举团选票规则：

（1）在某个州赢得最多的选票的候选人将会得到分配给该州的选举团选票的奖励。

（2）对某个固定的州，选举团选票的数量与该州的选民人数成正比。即如果某个州有 n 个选民，则有 nc 张选举团选票。

在这里我们不难看出，选举团选票奖励这一举措是为了更好地体现某个候选人得到了民心所向。既然只有在某州胜选才能获得选举团选票，不妨设某州选民总数为 $n=2k+1$，这里我们考虑 n 为奇数，偶数的情形类似。

如果 $2k$ 个人中，k 个人将选票投给了特朗普，k 个人将选票投给了希拉里，那么有一个人的选票将决定该州选举的最终结果。

如果我们假定 $n-1=2k$ 张选票是相互独立的并且投给两个候选人的概率相等，那么 P{某有 $2k+1$ 个选民的州做出选择}与 P{抛掷 $2k$ 枚均匀硬币，出现正面和反面次数相同}相等。

以上两个随机事件都属于 n 重伯努利试验。什么是 n 重伯努利试验？

设试验 E 只有两个可能的结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验。

设 $P(A)=p\ (0<p<1)$，此时 $P(\overline{A})=1-p$。

将 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串重复的独立实验为 n 重伯努利实验。若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 X 所有可能的取值为

$$0,1,2,\cdots,n$$

当 $X=k\ (0\leqslant k\leqslant n)$ 时，即 A 在 n 次试验中发生了 k 次，但是这 k 次试验发生的可能性有多种情况，例如：

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k次}\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k\,次},\ \underbrace{A\,A\cdots A}_{k-1\,次}\ \overline{A}\ A\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k-1\,次},\cdots$$

实际上，A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 C_n^k 种，且两两互不相容。

因此 A 在 n 次试验中发生 k 次的概率为 $C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}$，若令 $q=1-p$，则 X 的分布律为 $C_n^k\ p^k q^{n-k}$。即 $P(X=k)=C_n^k\ p^k q^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$。称这样的分布为二项分布，记为 $X\sim b(n,p)$。

因此，抛掷 $2k$ 枚均匀硬币出现正面和反面次数相同的概率计算如下。

设随机变量 X 表示抛掷中出现正面的次数，有

$$X\sim b(2k,\frac{1}{2})$$

$$P(X=k)=C_{2k}^k(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^k=\frac{(2k)!}{k!k!2^{2k}}$$

运用斯特林逼近公式，当 k 很大时，

$$k!\approx k^{(k+1)/2}\mathrm{e}^{-k}\sqrt{2\pi}$$

从而，$P(X=k)=C_{2k}^k(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^k=\frac{(2k)!}{k!k!2^{2k}}\approx\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$。

即，$P\{某有2k+1个选民的州做出选择\}3\approx\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$。

这个选择将影响 nc 张选举团选票的去向，我们将选举团选票的受影响程度称为该州选民的“平均权利”，那么选民的平均权利如下：

$$平均权利=ncP\{做出选择\}=\frac{nc}{\sqrt{(n-1)\pi/2}}\geqslant\frac{nc}{\sqrt{n\pi/2}}=c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}$$

因此，某州选民数为 n，平均权利正比于 n 的平方根。这说明在总统选举中，人口多的州有比较大的平均权利。

从2016年美国人口的分布情况来看，美国人口主要集中在东西海岸，而东西海岸也是美国比较富裕的地区，也是美国的中产阶级比较集中的地区。特朗普正是在这些地区取得了优势，才在大选当中获得了最后的胜利。这说明了美国的中产阶级人民还是对特朗普抱有极大期待的，也就是说，特朗普的最终胜选就是这些期望保有自己财富的中产阶级的共同选择。

反侵权盗版声明